

**WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHES  
PRÜFUNGSSEKRETARIAT**

DER RECHTS- UND WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT  
DER UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

**Von der/dem Studierenden auszufüllen** (Bitte leserlich und in Blockschrift):

**Name der Prüfung:** Schließende Statistik  
**Semester, dem die Prüfung zugeordnet ist:** WS 2015/2016 (z. B. WS 2015/2016, SS 2016)  
(Prüfungen im Februar/April = WS; Prüfungen im August/Oktobre = SS)  
**Nachname, Vorname der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_  
**Matrikelnummer der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der für mich geltenden Prüfungsordnung bekannt sind.

Mir ist damit bewusst, dass diese Prüfungsleistung als nicht abgelegt zählt, wenn die hierfür vorgesehenen Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Mir ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung zudem die ordnungsgemäße Anmeldung zur Prüfung voraussetzt. Die Teilnahme bei versäumter Anmeldung hat die Ungültigkeit der Prüfung zur Folge.

Zudem ist mir bekannt, dass eine nicht bestandene Prüfung zweimal wiederholt werden kann. Die Wiederholung einer bestandenen Prüfung ist nicht zulässig.

**Datum:** \_\_\_\_\_ **Unterschrift der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Von der Prüferin/Vom Prüfer auszufüllen:**

| Aufgabe      | Punkte | Max. Punkte | Bemerkungen |
|--------------|--------|-------------|-------------|
| 1+2          |        | 28          |             |
| 3            |        | 6           |             |
| 4            |        | 10          |             |
| 5            |        | 12          |             |
| 6            |        | 16          |             |
| 7            |        | 10          |             |
| 8            |        | 13          |             |
| 9            |        | 6           |             |
| 10           |        | 19          |             |
| <i>Summe</i> |        | 120         |             |

*bestanden*

*Note:* \_\_\_\_\_

*nicht bestanden*

*Unterschrift der Prüferin/des Prüfers:* \_\_\_\_\_

KLAUSURHEFT ZUR  
 BACHELOR-PRÜFUNG  
 SCHLIESSENDE STATISTIK  
 WINTERSEMESTER 2015/16

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 10 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 6 + 10 + 12 + 16 + 10 + 13 + 6 + 19) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und  $t$ -Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–22 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und  $t$ -Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

| <b>Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben</b> |     |     |     |     |     |     |          |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| Aufgabe   | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) | $\Sigma$ |
| 1   |     | ■   | ■   | ■   | ■   | ■   |          |
| 2   |     | ■   | ■   | ■   | ■   | ■   |          |
| 3   |     | ■   | ■   | ■   | ■   | ■   |          |
| 4   |     |     |     | ■   | ■   | ■   |          |
| 5   |     |     |     | ■   | ■   | ■   |          |
| 6   |     |     | ■   | ■   | ■   | ■   |          |
| 7   |     | ■   | ■   | ■   | ■   | ■   |          |
| 8   |     | ■   | ■   | ■   | ■   | ■   |          |
| 9   |     |     |     |     |     |     |          |
| 10  |     |     |     |     |     | ■   |          |
| $\Sigma$  |     |     |     |     |     |     |          |

**Aufgabe 1** (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

- |   | wahr                     | falsch                   |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Zufallsstichproben zu einer normalverteilten Zufallsvariablen $Y$ sind stets einfache (Zufalls-)Stichproben.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Setzt man den aus einer Realisation $x_1, \dots, x_n$ einer einfachen Stichprobe nach der Momentenmethode erhaltenen Parameterschätzwert in die zugehörige Likelihoodfunktion ein, so ist der erhaltene Wert stets kleiner als das Maximum der Likelihoodfunktion, welches bei Einsetzen des nach der ML-Methode erhaltenen Schätzwerts angenommen wird.               | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Im quadratischen Mittel für einen Parameter $\theta$ konsistente Schätzfunktionen sind nie erwartungstreu für $\theta$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Je größer der $p$ -Wert beim rechtsseitigen Gauß-Test für den Erwartungswert bei bekannter Varianz ist, umso kleiner ist die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Gilt für den $p$ -Wert bei Anwendung eines linksseitigen $t$ -Tests für den Erwartungswert $p \leq 0.05$ , so ist die Differenz $\mu - \mu_0$ zwischen dem wahren Erwartungswert $\mu$ und $\mu_0$ signifikant niedriger als 0.05.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Nimmt ein zweiseitiger Gauß-Test mit $H_0 : \mu = \mu_0$ die Nullhypothese $H_0$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$ an, so entscheidet höchstens einer der beiden einseitigen Tests mit $H_0 : \mu \leq \mu_0$ bzw. $H_0 : \mu \geq \mu_0$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ebenfalls zu Gunsten der Nullhypothese $H_0$ .                                     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Die Teststatistik der einfachen Varianzanalyse kann wegen der Gültigkeit der Streuungszerlegung $SS = SB + SW$ auch berechnet werden, wenn als Stichprobeninformation (neben den Einzelstichprobenumfängen $n_1, \dots, n_k$ ) nur die Stichprobenvarianzen $S_1^2, \dots, S_k^2$ aus den Einzelstichproben sowie $S^2$ aus der Gesamtstichprobe zur Verfügung stehen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Im einfachen linearen Regressionsmodell  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i, \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),$$

sind die Kleinst-Quadrate-Schätzfunktionen  $\hat{\beta}_1$  und  $\hat{\beta}_2$  stets normalverteilt.

**Aufgabe 2** (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

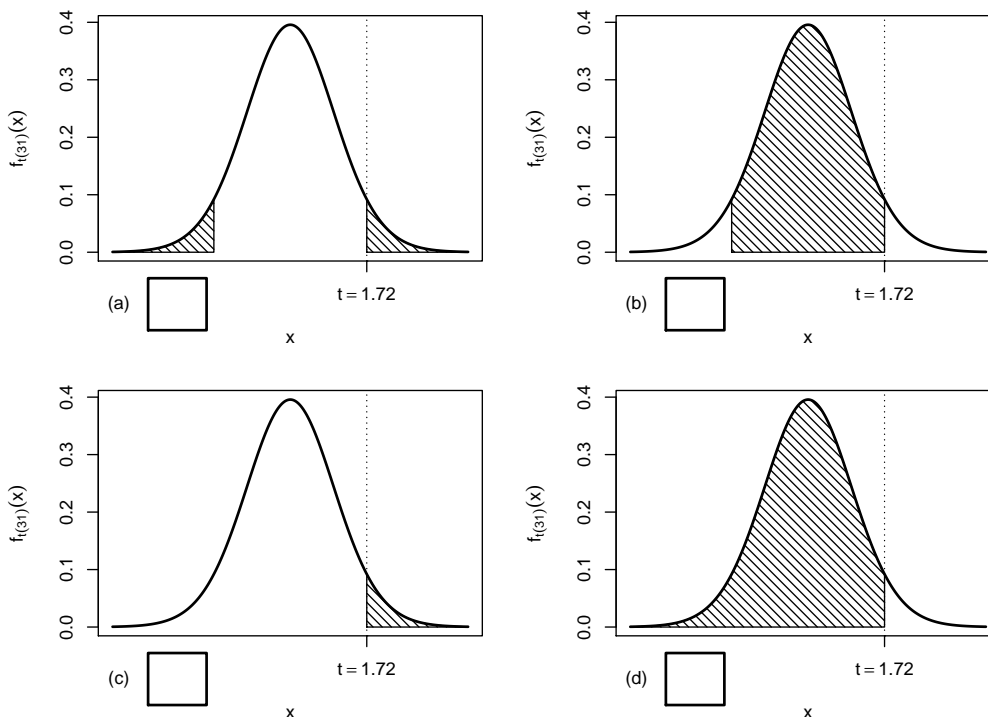
1. Es sei  $X_1, \dots, X_{16}$  eine einfache Stichprobe vom Umfang 16 zu  $Y$  mit  $Y \sim N(100, 16^2)$ . Dann gilt für die Verteilung von  $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$ :

- (a)  $\bar{X} \sim N(100, 64^2)$
- (b)  $\bar{X} \sim N(100, 1^2)$
- (c)  $\bar{X} \sim N(100, 16^2)$
- (d)  $\bar{X} \sim N(100, 4^2)$

2. Sei  $X_1, \dots, X_{32}$  eine einfache Stichprobe zu einer  $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen  $Y$  mit unbekanntem Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ . Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang  $n = 32$  soll

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 20 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 20$$

mit einem  $t$ -Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man  $t = 1.72$ . Markieren Sie die Abbildung, welche den  $p$ -Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter  $H_0$  (für  $\mu = \mu_0$ ) darstellt.



3. Wird die Teststatistik der einfachen Varianzanalyse als Quotient mit dem Zähler  $SB/(k - 1)$  und dem Nenner  $SW/(n - k)$  notiert und bezeichnet  $\sigma^2$  die Varianz der Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_k$ , so

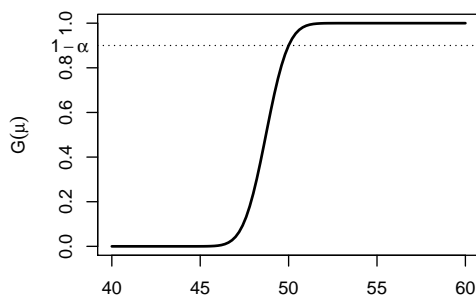
- (a) sind Zähler und Nenner stets sinnvolle Schätzer für  $\sigma^2$ .
- (b) ist der Zähler nur unter  $H_0$ , der Nenner stets ein sinnvoller Schätzer für  $\sigma^2$ .
- (c) ist der Zähler stets, der Nenner nur unter  $H_0$  ein sinnvoller Schätzer für  $\sigma^2$ .
- (d) sind Zähler und Nenner nur unter  $H_0$  sinnvolle Schätzer für  $\sigma^2$ .

4. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_{25}$  vom Umfang  $n = 25$  zu einer  $N(\mu, 5^2)$ -verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

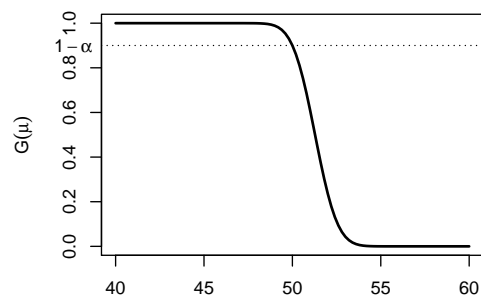
$$H_0 : \mu \leq 50 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu > 50$$

bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  betrachtet.

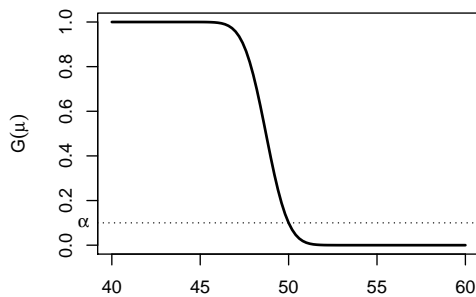
Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



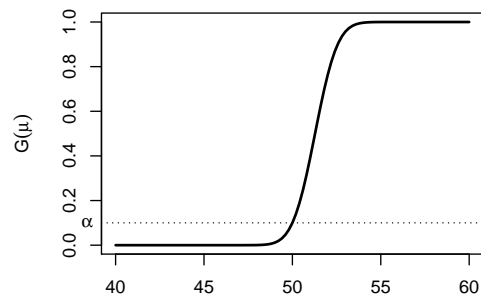
(a)



(b)



(c)



(d)

**Aufgabe 3** (6 Punkte)

Wird die Alternativverteilung mit Parameter  $p$  als (allgemeine) diskrete Verteilung mit den beiden Trägerpunkten  $a_1 = 0$  (mit Punktwahrscheinlichkeit  $1 - p$ ) und  $a_2 = 1$  (mit Punktwahrscheinlichkeit  $p$ ) aufgefasst, so kann statt des approximativen Gauß-Tests mit der Nullhypothese  $H_0 : p = p_0$  und der Alternative  $H_1 : p \neq p_0$  offensichtlich auch ein Chi-Quadrat-Anpassungstests mit  $p^0 = (1 - p_0, p_0)$  durchgeführt werden.

Zeigen Sie, dass zwischen den beiden Teststatistiken  $\chi^2$  des Chi-Quadrat-Anpassungstests und  $N$  des approximativen Gauß-Tests die Beziehung

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \stackrel{!}{=} \frac{(\hat{p} - p_0)^2}{p_0 \cdot (1 - p_0)} \cdot n = N^2$$

gilt.

*Hinweis:*

Sind in einer einfachen Stichprobe vom Umfang  $n$  insgesamt  $n_1$  Misserfolge („Nullen“) und  $n_2$  Erfolge („Einsen“) enthalten, so gilt offensichtlich  $\hat{p} = \frac{n_2}{n}$  sowie  $n_2 = n - n_1$ .



**Aufgabe 4** (3 + 1 + 6 = 10 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters  $b > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|b) = \begin{cases} 24 \cdot b^{-3} \cdot y^2 & \text{für } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \cdot b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter  $b$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

- (a) Zeigen Sie, dass  $E(Y) = \frac{3}{8} \cdot b$  gilt.
- (b) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{b}_{MM}$  nach der Methode der Momente.
- (c) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{b}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.

*Hinweise:*

- *Beachten Sie, dass Sie die Teile (b) und (c) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*





**Aufgabe 5** (7 + 2 + 3 = 12 Punkte)

Bei der Abfüllung von Spaghetti weiß der Hersteller aus langjähriger Erfahrung, dass die verwendete Maschine eine Standardabweichung von  $2[g]$  für die abgefüllte Menge hat. Nach einer routinemäßigen Überprüfung hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten  $500[g]$  in die Packungen einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 25 Packungen entnommen, deren gemessene Füllmengen  $x_1, \dots, x_{25}$  als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 25 zur annahmegemäß  $N(\mu, 2^2[g^2])$ -verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = 499.315[g].$$

- (a) Testen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.
- (b) Berechnen Sie den  $p$ -Wert zum Test aus Teil (a).
- (c) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.99(!)$  an.



**Aufgabe 6** (9 + 7 = 16 Punkte)

Ein Hersteller von Metallwaren produziert unter anderem Schrauben mit einer Soll-Länge von 7 [cm]. Es soll angenommen werden, dass die Länge der hergestellten Schrauben gemäß einer Normalverteilung mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz schwankt. Zur Überprüfung der Qualität der produzierten Schrauben werden 9 Schrauben aus dem laufenden Produktionsprozess entnommen. Die gemessenen Längen

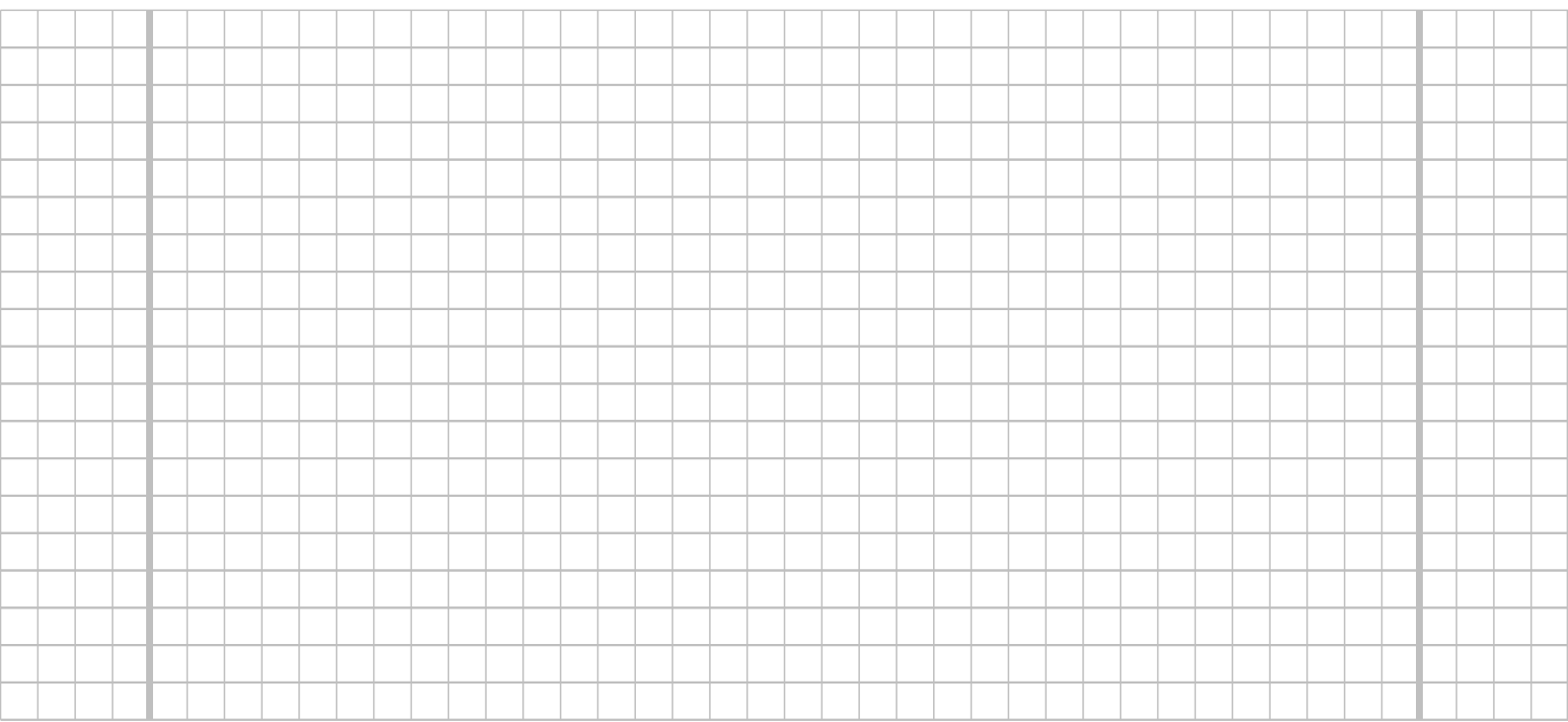
7.018, 7.128, 6.976, 7.063, 7.034, 6.912, 7.002, 7.076, 6.991

seien als Realisation einer einfachen Stichprobe zur normalverteilten Grundgesamtheit aufzufassen. Aus dieser Realisation wurde bereits  $s^2 = 0.003946$  berechnet.

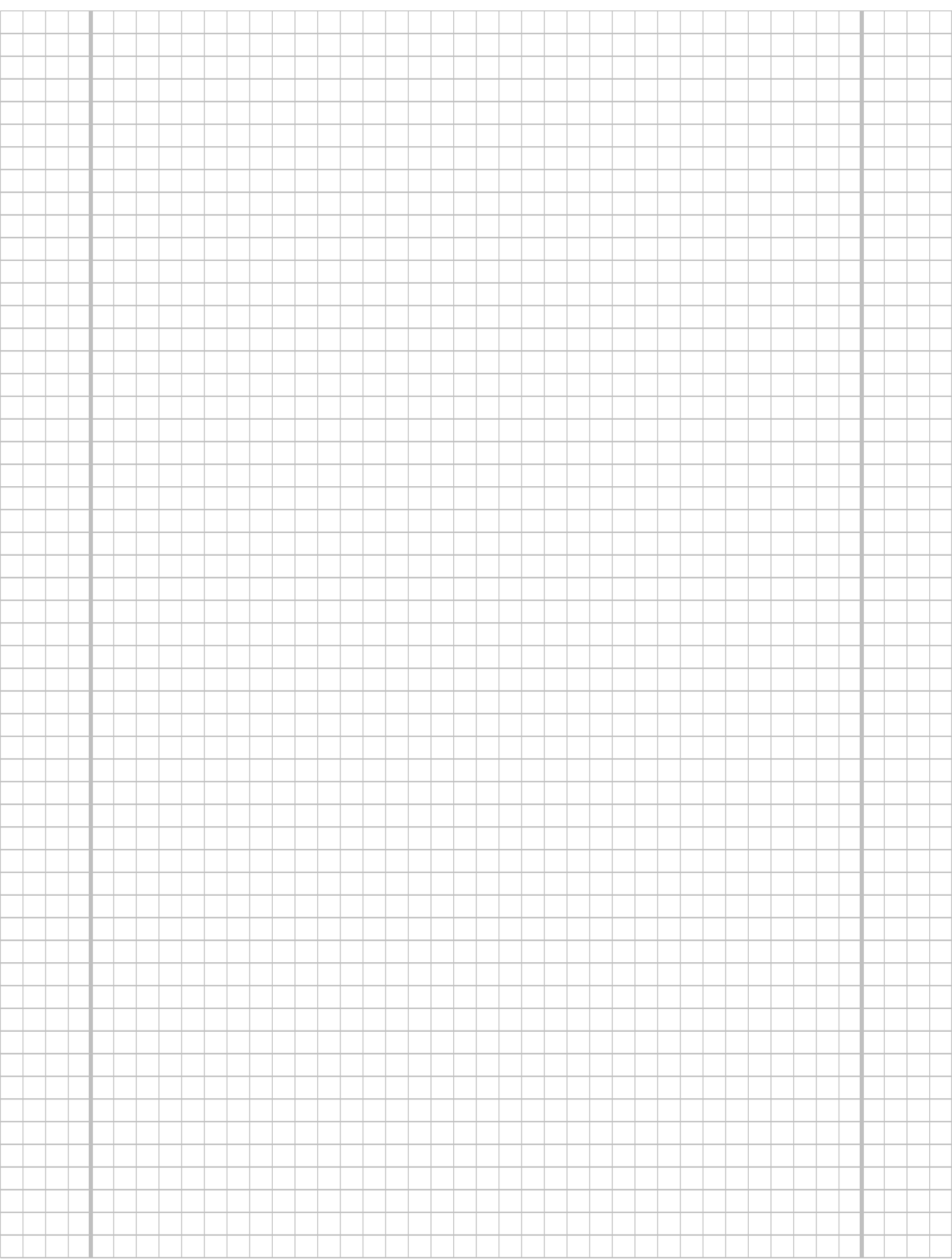
- (a) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob die tatsächliche mittlere Länge der produzierten Schrauben von der angegebenen Soll-Länge von 7 [cm] abweicht. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.
- (b) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob die Varianz der Länge der produzierten Schrauben im Vergleich zur vom Hersteller angegebenen Toleranz  $\sigma_0^2 = 0.0016$  zu groß ist. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

*Hinweis: Verwenden Sie für Teil (b) den folgenden Tabellenausschnitt mit  $p$ -Quantilen von  $\chi^2(n)$ -Verteilungen*

| $n \backslash p$ | 0.01  | 0.025 | 0.05  | 0.50  | 0.90   | 0.95   | 0.975  | 0.99   |
|------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 6                | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 5.348 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 |
| 7                | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 6.346 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 |
| 8                | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 7.344 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 |
| 9                | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 8.343 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 |
| 10               | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 9.342 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 |









**Aufgabe 7** (10 Punkte)

Zwei unterschiedlichen Gruppen mit 75 (Gruppe *A*) bzw. 67 (Gruppe *B*) Blutdruckpatienten wird jeweils ein spezieller Blutdrucksenker verabreicht. Nach einer festgelegten Zeit werden dann alle Blutdruckpatienten gefragt, ob durch das verabreichte Medikament eine blutdrucksenkende Wirkung eingetreten ist. In der Gruppe der Blutdruckpatienten, denen Blutdrucksenker *A* verabreicht wurde, beantworten 45 Personen diese Frage positiv, in der zu Blutdrucksenker *B* gehörigen Gruppe 51 Personen. Überprüfen Sie unter der Annahme, dass es sich bei dem Stichprobenergebnis um die Realisation zweier unabhängiger einfacher Stichproben handelt, zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob Blutdrucksenker *B* besser wirkt als Blutdrucksenker *A* (bezogen auf die Erfolgswahrscheinlichkeit für eine blutdrucksenkende Wirkung). Formulieren Sie das Ergebnis auch in Form eines Antwortsatzes.





**Aufgabe 8** (13 Punkte)

Um zu überprüfen, ob die Anzahl der bearbeiteten Zusatzübungsblätter einen Einfluss auf die Leistung in der schriftlichen Prüfung hat, wurden die Prüflinge einer Statistik-Klausur im Wintersemester 2014/15 in 3 Gruppen eingeteilt (Gruppe 1: kein Zusatzblatt bearbeitet, Gruppe 2: ein Zusatzblatt bearbeitet, Gruppe 3: beide Zusatzblätter bearbeitet). Aus den erreichten Punktzahlen der entsprechenden Klausur wurden auf Basis dieser Einteilung die folgenden Daten aggregiert:

| $j$ (Gruppe) | $n_j$ | $\bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}$ | $\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}^2$ |
|--------------|-------|--|------------------------------|
| 1            | 89    | 83.517   | 656703.00                    |
| 2            | 17    | 89.235   | 140037.00                    |
| 3            | 55    | 100.045  | 563757.25                    |

Für die Durchführung der einfachen Varianzanalyse wurde hieraus bereits die Größe  $SW = 53850.143$  berechnet.

Überprüfen Sie mit einer einfachen Varianzanalyse (Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ ) unter der Annahme, dass die erreichten Punktzahlen Realisierungen von unabhängig  $N(\mu_j, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen  $X_{j,i}$  ( $1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n_j$ ) sind, ob die Anzahl der bearbeiteten Zusatzblätter einen Einfluss auf die (mittlere) erreichte Punktzahl hat. Fassen Sie das Ergebnis der Varianzanalyse auch in einem Antwortsatz zusammen.

*Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95-Quantilen von  $F(m, n)$ -Verteilungen:*

| $n \backslash m$ | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 155     | 156     | 157     | 158     | 159     |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1                | 161.448 | 199.500 | 215.707 | 224.583 | 230.162 | 253.492 | 253.497 | 253.503 | 253.508 | 253.513 |
| 2                | 18.513  | 19.000  | 19.164  | 19.247  | 19.296  | 19.489  | 19.489  | 19.489  | 19.489  | 19.489  |
| 3                | 10.128  | 9.552   | 9.277   | 9.117   | 9.013   | 8.544   | 8.544   | 8.544   | 8.544   | 8.544   |
| 4                | 7.709   | 6.944   | 6.591   | 6.388   | 6.256   | 5.651   | 5.651   | 5.651   | 5.651   | 5.651   |
| 5                | 6.608   | 5.786   | 5.409   | 5.192   | 5.050   | 4.391   | 4.391   | 4.391   | 4.390   | 4.390   |
| 155              | 3.902   | 3.054   | 2.663   | 2.430   | 2.273   | 1.303   | 1.303   | 1.303   | 1.302   | 1.302   |
| 156              | 3.902   | 3.054   | 2.663   | 2.430   | 2.272   | 1.303   | 1.302   | 1.302   | 1.301   | 1.301   |
| 157              | 3.901   | 3.054   | 2.662   | 2.429   | 2.272   | 1.302   | 1.302   | 1.301   | 1.301   | 1.300   |
| 158              | 3.901   | 3.053   | 2.662   | 2.429   | 2.271   | 1.302   | 1.301   | 1.301   | 1.300   | 1.300   |
| 159              | 3.901   | 3.053   | 2.661   | 2.429   | 2.271   | 1.301   | 1.300   | 1.300   | 1.300   | 1.299   |





**Aufgabe 9** (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Zur Erklärung der Höhe der laufenden Grundmittel an deutschen Hochschulen  $y_i$  (in Millionen Euro) durch die Anzahl von Studierenden an deutschen Hochschulen  $x_i$  (in Millionen) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Aus vorliegenden Daten zu den Jahren 2008–2013 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

|          |        |         |       |        |         |
|----------|--------|---------|-------|--------|---------|
| 1        | 2      | 3       | 4     | 5      | 6       |
| -223.594 | -8.204 | 222.692 | 7.144 | 76.020 | -74.059 |

Coefficients:

|             | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t )     |
|-------------|----------|------------|---------|--------------|
| (Intercept) | 3801.3   | 950.5      | 3.999   | 0.016138 *   |
| x           | 5358.6   | 449.1      | 11.933  | 0.000283 *** |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 166.6 on 4 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9727, Adjusted R-squared: 0.9658

F-statistic: 142.4 on 1 and 4 DF, p-value: 0.0002826

- Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für  $\beta_1$  und  $\beta_2$  an.
- Geben Sie den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- Welcher Anteil der Gesamtvarianz der Höhe der laufenden Grundmittel an deutschen Hochschulen wird durch das lineare Modell erklärt?
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.01$ , ob  $\beta_1$  signifikant positiv ist.
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob  $\beta_2$  signifikant von Null verschieden ist.
- Welche Höhe der laufenden Grundmittel (in Millionen Euro) prognostiziert das Modell für ein Jahr mit einer Studierendenanzahl von 2.4 (in Millionen)?



**Aufgabe 10** (6 + 2 + 3 + 3 + 5 = 19 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

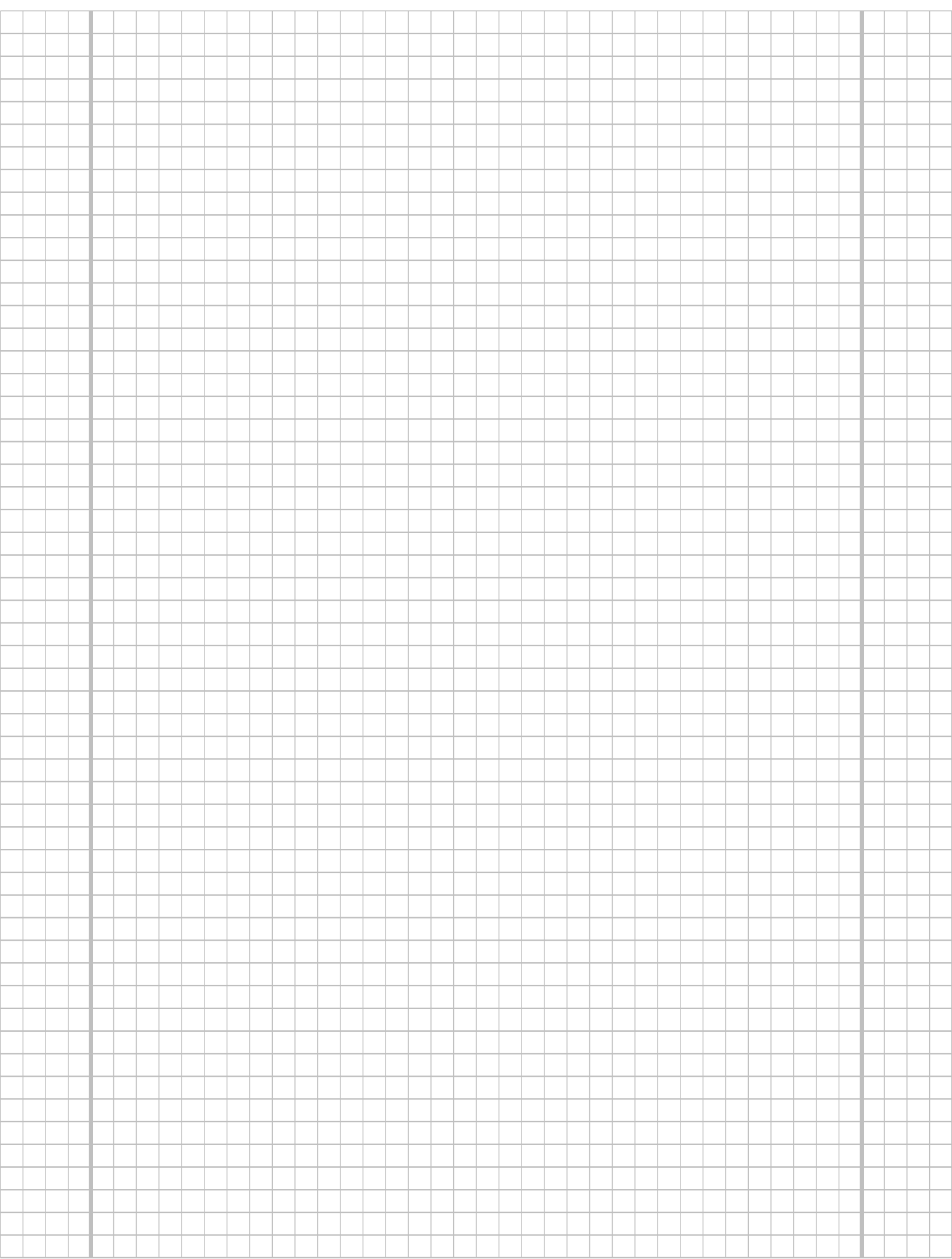
$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang  $n = 20$  wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{20} y_i &= 65.443; & \sum_{i=1}^{20} y_i^2 &= 424.152; & \sum_{i=1}^{20} x_i &= 121.795; \\ \sum_{i=1}^{20} x_i^2 &= 779.684; & \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i &= 336.339 \end{aligned}$$

- (a) Schätzen Sie  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.
- (b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für  $\sigma^2$  den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- (c) Berechnen Sie  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2$  und  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2$ .
- (d) Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.95$  für  $\beta_1$  an.
- (e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.90$  für  $y_0$  gegeben  $x_0 = 4$  an.







### Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

|     | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

### $p$ -Quantile der Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(N_p) = p$$

| $p$   | 0.85  | 0.90  | 0.95  | 0.975 | 0.99  | 0.995 | 0.9995 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $N_p$ | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291  |

**$p$ -Quantile der  $t(n)$ -Verteilungen  $t_{n;p}$**

$$T \sim t(n) \Rightarrow F_T(t_{n;p}) = p$$

| $n \backslash p$ | 0.85  | 0.90  | 0.95  | 0.975  | 0.99   | 0.995  | 0.9995  |
|------------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| 1                | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2                | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303  | 6.965  | 9.925  | 31.599  |
| 3                | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182  | 4.541  | 5.841  | 12.924  |
| 4                | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776  | 3.747  | 4.604  | 8.610   |
| 5                | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571  | 3.365  | 4.032  | 6.869   |
| 6                | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447  | 3.143  | 3.707  | 5.959   |
| 7                | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365  | 2.998  | 3.499  | 5.408   |
| 8                | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306  | 2.896  | 3.355  | 5.041   |
| 9                | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262  | 2.821  | 3.250  | 4.781   |
| 10               | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228  | 2.764  | 3.169  | 4.587   |
| 11               | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201  | 2.718  | 3.106  | 4.437   |
| 12               | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179  | 2.681  | 3.055  | 4.318   |
| 13               | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160  | 2.650  | 3.012  | 4.221   |
| 14               | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145  | 2.624  | 2.977  | 4.140   |
| 15               | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131  | 2.602  | 2.947  | 4.073   |
| 16               | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120  | 2.583  | 2.921  | 4.015   |
| 17               | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110  | 2.567  | 2.898  | 3.965   |
| 18               | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101  | 2.552  | 2.878  | 3.922   |
| 19               | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093  | 2.539  | 2.861  | 3.883   |
| 20               | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086  | 2.528  | 2.845  | 3.850   |
| 21               | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080  | 2.518  | 2.831  | 3.819   |
| 22               | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074  | 2.508  | 2.819  | 3.792   |
| 23               | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069  | 2.500  | 2.807  | 3.768   |
| 24               | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064  | 2.492  | 2.797  | 3.745   |
| 25               | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060  | 2.485  | 2.787  | 3.725   |
| 26               | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056  | 2.479  | 2.779  | 3.707   |
| 27               | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052  | 2.473  | 2.771  | 3.690   |
| 28               | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048  | 2.467  | 2.763  | 3.674   |
| 29               | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045  | 2.462  | 2.756  | 3.659   |
| 30               | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042  | 2.457  | 2.750  | 3.646   |
| 31               | 1.054 | 1.309 | 1.696 | 2.040  | 2.453  | 2.744  | 3.633   |
| 32               | 1.054 | 1.309 | 1.694 | 2.037  | 2.449  | 2.738  | 3.622   |
| 33               | 1.053 | 1.308 | 1.692 | 2.035  | 2.445  | 2.733  | 3.611   |
| 34               | 1.052 | 1.307 | 1.691 | 2.032  | 2.441  | 2.728  | 3.601   |
| 35               | 1.052 | 1.306 | 1.690 | 2.030  | 2.438  | 2.724  | 3.591   |
| 40               | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021  | 2.423  | 2.704  | 3.551   |
| 60               | 1.045 | 1.296 | 1.671 | 2.000  | 2.390  | 2.660  | 3.460   |
| 80               | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990  | 2.374  | 2.639  | 3.416   |
| 100              | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984  | 2.364  | 2.626  | 3.390   |
| 120              | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980  | 2.358  | 2.617  | 3.373   |
| 140              | 1.040 | 1.288 | 1.656 | 1.977  | 2.353  | 2.611  | 3.361   |
| 160              | 1.040 | 1.287 | 1.654 | 1.975  | 2.350  | 2.607  | 3.352   |
| 180              | 1.039 | 1.286 | 1.653 | 1.973  | 2.347  | 2.603  | 3.345   |
| 200              | 1.039 | 1.286 | 1.653 | 1.972  | 2.345  | 2.601  | 3.340   |
| 250              | 1.039 | 1.285 | 1.651 | 1.969  | 2.341  | 2.596  | 3.330   |