Aufgabenstellung und Ergebnisse zur

Bachelor-Prüfung
Schliessende Statistik
Sommersemester 2025

apl. Prof. Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 18 + 15 + 10 + 19 + 11 + 13 + 7 + 6 + 21) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–12 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.
- Alle Punkte innerhalb von Zahlen sind stets Dezimalpunkte (und keine Tausenderpunkte).

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben							
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	Σ
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
Σ							

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

		wahr	falsch
1.	Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu einer normalverteilten Zufallsvariablen Y. Dann sind auch $X_1, \ldots, X_n$ stets normalverteilt.	■	□
2.	Zur Schätzung des Parameters $\theta \in \mathbb{R}$ seien für $n \in \mathbb{N}$ Schätzfunktionen T_n gegeben mit den Eigenschaften $\mathrm{E}(T_n) = \frac{\theta}{n}$ und $\mathrm{Var}(T_n) = \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge T_n von Schätzfunktionen für θ konsistent im quadratischen Mittel.	□	■
3.	Gilt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n) = 0$ für alle $\theta \in \Theta$, so ist die Folge von Schätzfunktion $\widehat{\theta}_n$ effizient für θ.	□	■
4.	Wird bei einem tatsächlichen Erwartungswert von 48 die Verletzung der Nullhypothese $\mu \leq 50$ eines rechtsseitigen Gauß-Tests im Mittel bei 2 von 100 Durchführungen des Tests fälschlicherweise signalisiert, so gilt für die zugehörige Gütefunktion $G(48) = 0.02$.	■	□
5.	Beim zweiseitigen Gauß-Test für den Erwartungswert bei bekannter Varianz (mit $H_0 : \mu = \mu_0$) ist der p-Wert (bei gleichbleibendem Stichprobenumfang) umso größer, je geringer der Abstand $\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert$ ausfällt.	■	□
6.	Das Verkleinern des Signifikanzniveaus führt bei Anwendung eines approximativen Gauß-Tests für den Parameter p einer Alternativverteilung stets zu einer Verkleinerung des kritischen Bereichs.	■	□
7.	Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll anhand einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 200$ überprüft werden, ob die Grundgesamtheit geometrisch verteilt mit Parameter $p = 0.4$ ist. Wird der Test auf Basis einer geeigneten Klassierung aus 6 Klassen durchgeführt, so ist zur Konstruktion des Ablehnungsbereiches die χ^2-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden zu verwenden.	■	□
8.	Sind die Voraussetzungen zur exakten Anwendung der einfachen Varianzanalyse erfüllt, so unterscheiden sich die Verteilungen zu den einzelnen Faktorstufen höchstens im Erwartungswert.	■	□
9.	Bei der Anwendung der Kleinst-Quadrate-Methode im einfachen linearen Regressionsmodell werden $\widehat{\beta}_1$ und $\widehat{\beta}_2$ so bestimmt, dass die Summe der quadrierten horizontalen Abstände der Beobachtungspunkte zur Regressionsgeraden möglichst klein ausfällt.	□	■

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Konfidenzintervalle für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz sind umso breiter,

   (a) je kleiner der Stichprobenumfang und je kleiner die Varianz ist. ☐

   (b) je kleiner der Stichprobenumfang und je größer die Varianz ist. ■

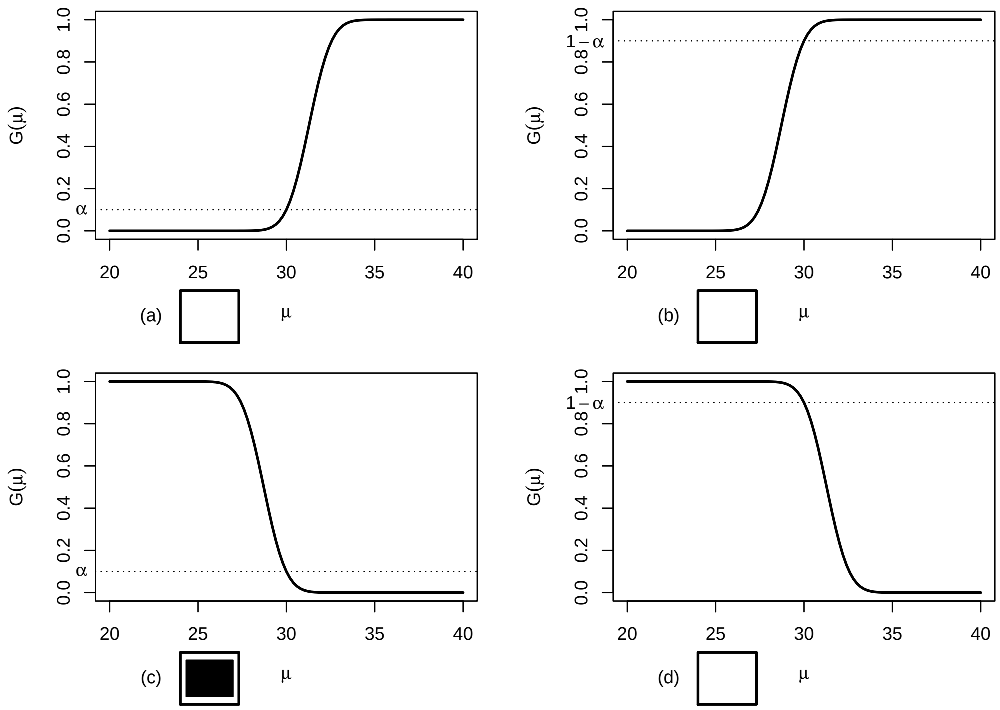
   (c) je größer der Stichprobenumfang und je kleiner die Varianz ist. ☐

   (d) je größer der Stichprobenumfang und je größer die Varianz ist. ☐

2. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{25}$ vom Umfang $n = 25$ zu einer $N(\mu, 5^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 30 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu < 30$$

   bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
   Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



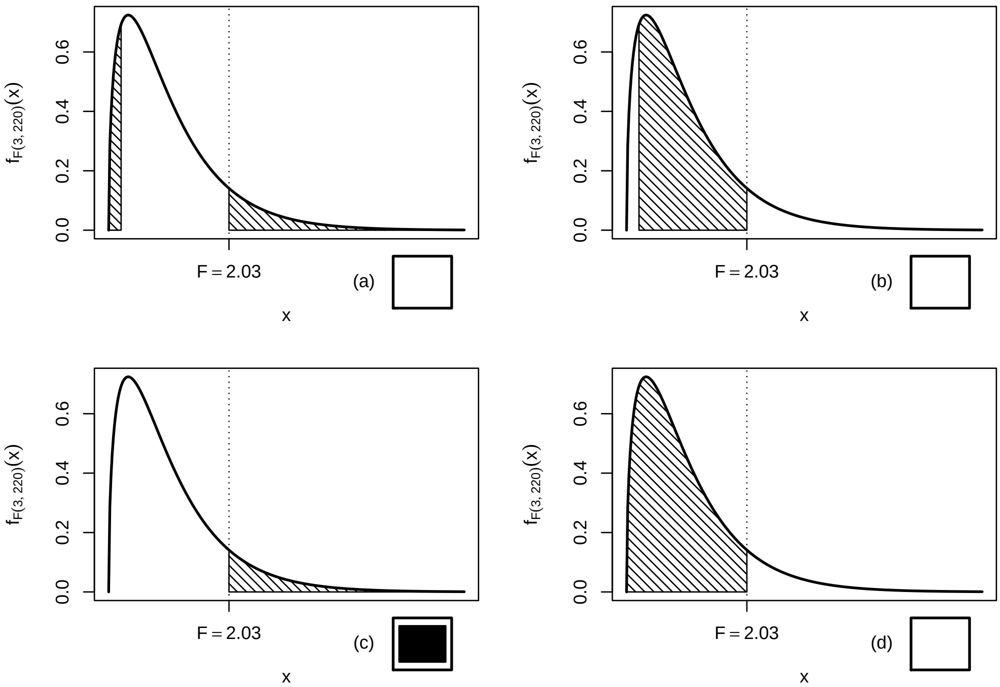
3. Bei der Durchführung eines zweiseitigen Gauß-Tests zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.025$ kann die Nullhypothese $\mu = \mu_0$ nicht abgelehnt werden, während ein linksseitiger Gauß-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ auf Grundlage derselben Stichprobeninformation $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ablehnt. Damit gilt für den p-Wert des *zweiseitigen* Gauß-Tests stets:

   (a) $p \geq 0.10$ ☐
   (b) $0.025 \leq p < 0.10$ ■
   (c) $0.05 \leq p < 0.10$ ☐
   (d) $0.025 \leq p < 0.05$ ☐

4. Es sei $X_1, \ldots, X_{81}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang 81 zu Y mit $Y \sim N(16, 18^2)$. Dann gilt für die Teststatistik $N = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ des Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz zur Nullhypothese $H_0 : \mu = 20$:

   (a) $N \sim N(-4, 1)$ ☐
   (b) $N \sim N\left(-2, 2^2\right)$ ☐
   (c) $N \sim N\left(-4, 2^2\right)$ ☐
   (d) $N \sim N(-2, 1)$ ■

5. Bei der Durchführung einer einfachen Varianzanalyse mit $k = 4$ Faktorstufen und einem Gesamtstichprobenumfang von $n = 224$ erhält man die realisierte Teststatistik $F = 2.03$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 darstellt.



Aufgabe 3 (6 + 3 + 1 = 10 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \dfrac{5 \cdot a^5}{y^6} & \text{für } y \geq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter a soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Zeigen Sie, dass $E(Y) = \frac{5}{4} \cdot a$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) und Teil (c) ohne die Bearbeitung der Teile (a) und (b) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{a}_{ML} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$

(b) Nachweis durch Berechnung des Erwartungswerts

(c) $\widehat{a}_{MM} = \frac{4}{5} \cdot \overline{x}$

Aufgabe 4 (7 + 2 + 3 + 7 = 19 Punkte)

Bei der Herstellung von Kaffekapseln weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Abfüllmaschine eine Standardabweichung von $0.3[g]$ für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllmaschine im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten $7[g]$ in die Kapseln abfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 36 Kapseln entnommen, deren gemessene Kaffeepulvermengen $x_1, \dots, x_{36}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 36 zur annahmegemäß $N(\mu, 0.3^2[g^2])$-verteilten abgefüllten Menge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} x_i = 6.907[g] \; .$$

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Berechnen Sie den p-Wert zum Test aus Teil (a). Wie wäre die Entscheidung zum Test aus Teil (a) bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ ausgefallen?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (a) eine Testentscheidung zu Gunsten der Nullhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge $6.85[g]$ beträgt?

(d) Überprüfen Sie unter Verwendung der Varianzschätzung $s^2 = 0.0944$ mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die oben getroffene Annahme $\sigma^2 = 0.3^2$ aus statistischer Sicht zu verwerfen ist. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (d) den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen

$n\backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
31	15.655	17.539	19.281	30.336	41.422	44.985	48.232	52.191
32	16.362	18.291	20.072	31.336	42.585	46.194	49.480	53.486
33	17.074	19.047	20.867	32.336	43.745	47.400	50.725	54.776
34	17.789	19.806	21.664	33.336	44.903	48.602	51.966	56.061
35	18.509	20.569	22.465	34.336	46.059	49.802	53.203	57.342
36	19.233	21.336	23.269	35.336	47.212	50.998	54.437	58.619
37	19.960	22.106	24.075	36.336	48.363	52.192	55.668	59.893
38	20.691	22.878	24.884	37.335	49.513	53.384	56.896	61.162
39	21.426	23.654	25.695	38.335	50.660	54.572	58.120	62.428
40	22.164	24.433	26.509	39.335	51.805	55.758	59.342	63.691

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $N = -1.86 \in (-\infty, -1.645) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test bestätigt also den Verdacht der Herstellerfirma, dass die von der Maschine abgefüllte Menge im Mittel zu niedrig ist.

(b) p-Wert $p = 0.0314$. Entscheidung wäre zu Gunsten der Nullhypothese ausgefallen.

(c) $\beta(6.85) = 0.0869$

(d) $\chi^2 = 36.711 \notin [0, 20.569) \cup (53.203, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Die getroffene Annahme $\sigma^2 = 0.3^2$ muss also laut Test nicht verworfen werden.

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Um zu überprüfen, ob sich die Leistungsfähigkeit von LiFePo4-Akkus zweier verschiedener Marken unterscheidet, lässt ein Testinstitut die Ausdauer jeweils eines (vollgeladenen) Akkus beim Betrieb von 9 unterschiedlichen Kompressorkühlboxen untersuchen. Es wurden dabei die folgenden Laufzeiten (in Stunden) bis zur automatischen Abschaltung der Kühlboxen festgestellt:

Kühlbox i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Marke A x_i^A	99.2	110.7	98.8	102.3	103.7	119.1	113.4	108.7	111.8
Marke B x_i^B	106.6	105.3	94.5	96.5	99	110.8	107.8	111.3	96.6

Überprüfen Sie unter der Annahme, dass die gemessenen Laufzeiten aus einer einfachen Stichprobe zur zweidimensional normalverteilten Grundgesamtheit (Y^A, Y^B) der Laufzeiten mit Akkumarke A (Y^A) bzw. Akkumarke B (Y^B) stammen, zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass die Verwendung von Akkumarke A im Vergleich zu Akkumarke B durchschnittlich eine höhere Laufzeit ermöglicht. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$t = 2.0567 \in (1.86, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Der Test kann also die Vermutung, dass die Verwendung von Akkumarke A im Vergleich zu Akkumarke B eine höhere Laufzeit ermöglicht, bestätigen.

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Um zu überprüfen, ob es einen Zusammenhang zwischen den täglichen Renditen des DAX und des DJIA gibt, wurden die qualitativen Bewegungen des DAX und des DJIA an 250 Handelstagen, die man als Realisation einer einfachen Stichprobe auffassen können soll, in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	DJIA gesunken	DJIA nicht gesunken
DAX gesunken	72	45
DAX nicht gesunken	44	89

Überprüfen Sie anhand dieses Datenmaterials zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob eine stochastische Abhängigkeit zwischen den qualitativen täglichen Bewegungen des DAX und des DJIA besteht. Formulieren Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz!

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$\chi^2 = 20.265 \in (3.841, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Es ist also eine signifikante Abhängigkeit zwischen den qualitativen täglichen Bewegungen des DAX und des DJIA festzustellen.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Zur Beurteilung der Präzision zweier Messgeräte A und B wird eine Referenzgröße jeweils unabhängig voneinander mit beiden Messgeräten wiederum jeweils unabhängig voneinander mehrfach gemessen. Es werde angenommen, dass die gemessenen Werte Y^A bzw. Y^B der beiden Messgeräte jeweils normalverteilt seien mit unbekannten Erwartungswerten μ_A bzw. μ_B sowie unbekannten Varianzen σ_A^2 bzw. σ_B^2. Die Ergebnisse der wiederholten Messungen lassen sich als (voneinander unabhängige) einfache Stichproben $X_1^A, \ldots, X_{16}^A$ vom Umfang 16 zu Y^A sowie $X_1^B, \ldots, X_{19}^B$ vom Umfang 19 zu Y^B auffassen, aus den zugehörigen Realisationen wurden bereits die Mittelwerte $\overline{x^A} = 200.1491$ bzw. $\overline{x^B} = 200.1277$ sowie die Stichprobenvarianzen $s_{Y^A}^2 = 0.447$ bzw. $s_{Y^B}^2 = 0.9404$ berechnet. Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob Messgerät A eine höhere Präzision (im Sinne einer geringeren Streuung) als Messgerät B hat. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95*-Quantilen von* $F(m,n)$*-Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel* $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$.

$n \backslash m$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$F = 0.475 \notin [0, 0.425) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!
Der Test kann also die Vermutung, dass Messgerät A eine höhere Präzision (im Sinne einer geringeren Streuung) als Messgerät B hat, nicht bestätigen.

Aufgabe 8 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Zur Erklärung der (diskreten) Wochenrenditen der Bechtle AG y_i durch die (diskreten) Wochenrenditen des DAX x_i unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus den Daten zu 26 aufeinanderfolgenden Wochen der zweiten Jahreshälfte 2024 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.053472 -0.020721 -0.004059  0.024279  0.060297

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.014639   0.006843  -2.139   0.0428 *
x            0.874389   0.329576   2.653   0.0139 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.03451 on 24 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2268,        Adjusted R-squared:  0.1946
F-statistic: 7.039 on 1 and 24 DF,  p-value: 0.01392
```

(a) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(b) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Welcher Anteil der Gesamtvarianz der (diskreten) Wochenrenditen der Bechtle AG wird durch das lineare Modell erklärt?

(d) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_1 signifikant von Null verschieden ist.

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob β_2 signifikant positiv ist.

(f) Welche (diskrete) Wochenrendite der Bechtle AG prognostiziert das Modell in einer Woche mit einer (diskreten) DAX-Rendite von 0.02?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = -0.014639$, $\widehat{\beta}_2 = 0.874389$

(b) $\widehat{\sigma^2} = 0.0011909$

(c) 0.2268

(d) β_1 ist signifikant von Null verschieden.

(e) β_2 ist signifikant positiv.

(f) 0.0028488

Aufgabe 9 (6 + 2 + 3 + 5 + 5 = 21 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 32$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{32} y_i = 371.06; \quad \sum_{i=1}^{32} y_i^2 = 5151.98; \quad \sum_{i=1}^{32} x_i = 34.26;$$

$$\sum_{i=1}^{32} x_i^2 = 74.45; \quad \sum_{i=1}^{32} x_i \cdot y_i = 513.19$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(d) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**, ob β_2 signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.90$ für y_0 gegeben $x_0 = 2.5$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 8.3096$, $\widehat{\beta}_2 = 3.0693$

(b) $\widehat{\sigma}^2 = 16.4495$

(c) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 1.0132$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.43549$

(d) $t = 4.651 \in (2.457, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

β_2 ist also signifikant positiv.

(e) $[8.813, 23.153]$