

**WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHES  
PRÜFUNGSSEKRETARIAT**

FAKULTÄT FÜR EMPIRISCHE HUMANWISSENSCHAFTEN UND WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT  
DER UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

**Von der/dem Studierenden auszufüllen** (Bitte leserlich und in Blockschrift):

**Name der Prüfung:** Schließende Statistik  
**Semester, dem die Prüfung zugeordnet ist:** SS 2025 (z. B. WS 2019/2020, SS 2020)  
(Prüfungen im Februar/April = WS; Prüfungen im August/Oktobre = SS)  
**Nachname, Vorname der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_  
**Matrikelnummer der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der für mich geltenden Prüfungsordnung bekannt sind.

Mir ist damit bewusst, dass diese Prüfungsleistung als nicht abgelegt zählt, wenn die hierfür vorgesehenen Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Mir ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung zudem die ordnungsgemäße Anmeldung zur Prüfung voraussetzt. Die Teilnahme bei versäumter Anmeldung hat die Ungültigkeit der Prüfung zur Folge.

Zudem ist mir bekannt, dass eine nicht bestandene Prüfung zweimal wiederholt werden kann. Die Wiederholung einer bestandenen Prüfung ist nicht zulässig.

**Datum:** \_\_\_\_\_ **Unterschrift der/des Studierenden:** \_\_\_\_\_

**Von der Prüferin/Vom Prüfer auszufüllen:**

Aufgabe	Punkte	Max. Punkte	Bemerkungen
1		18	
2		15	
3		10	
4		19	
5		11	
6		13	
7		7	
8		6	
9		21	
<i>Summe</i>		120	

*bestanden* Note: \_\_\_\_\_

*nicht bestanden* Unterschrift der Prüferin/des Prüfers: \_\_\_\_\_

KLAUSURHEFT ZUR  
 BACHELOR-PRÜFUNG  
 SCHLIESSENDE STATISTIK  
 SOMMERSEMESTER 2025

apl. Prof. Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 18 + 15 + 10 + 19 + 11 + 13 + 7 + 6 + 21) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und  $t$ -Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–26 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und  $t$ -Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.
- Alle Punkte innerhalb von Zahlen sind stets Dezimalpunkte (und keine Tausenderpunkte).

<b>Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben</b>							
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	$\Sigma$
1		■	■	■	■	■	
2		■	■	■	■	■	
3				■	■	■	
4					■	■	
5		■	■	■	■	■	
6		■	■	■	■	■	
7		■	■	■	■	■	
8							
9						■	
$\Sigma$							

**Aufgabe 1** (18 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

- |  | wahr                     | falsch                   |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang $n$ zu einer normalverteilten Zufallsvariablen $Y$ . Dann sind auch $X_1, \dots, X_n$ stets normalverteilt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Zur Schätzung des Parameters $\theta \in \mathbb{R}$ seien für $n \in \mathbb{N}$ Schätzfunktionen $T_n$ gegeben mit den Eigenschaften $E(T_n) = \frac{\theta}{n}$ und $\text{Var}(T_n) = \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Folge $T_n$ von Schätzfunktionen für $\theta$ konsistent im quadratischen Mittel.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$ für alle $\theta \in \Theta$ , so ist die Folge von Schätzfunktion $\hat{\theta}_n$ effizient für $\theta$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Wird bei einem tatsächlichen Erwartungswert von 48 die Verletzung der Nullhypothese $\mu \leq 50$ eines rechtsseitigen Gauß-Tests im Mittel bei 2 von 100 Durchführungen des Tests fälschlicherweise signalisiert, so gilt für die zugehörige Gütefunktion $G(48) = 0.02$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Beim zweiseitigen Gauß-Test für den Erwartungswert bei bekannter Varianz (mit $H_0 : \mu = \mu_0$ ) ist der $p$ -Wert (bei gleichbleibendem Stichprobenumfang) umso größer, je geringer der Abstand $ \bar{X} - \mu_0 $ ausfällt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Das Verkleinern des Signifikanzniveaus führt bei Anwendung eines approximativen Gauß-Tests für den Parameter $p$ einer Alternativverteilung stets zu einer Verkleinerung des kritischen Bereichs.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll anhand einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 200$ überprüft werden, ob die Grundgesamtheit geometrisch verteilt mit Parameter $p = 0.4$ ist. Wird der Test auf Basis einer geeigneten Klassierung aus 6 Klassen durchgeführt, so ist zur Konstruktion des Ablehnungsbereiches die $\chi^2$ -Verteilung mit 5 Freiheitsgraden zu verwenden. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Sind die Voraussetzungen zur exakten Anwendung der einfachen Varianzanalyse erfüllt, so unterscheiden sich die Verteilungen zu den einzelnen Faktorstufen höchstens im Erwartungswert.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9. Bei der Anwendung der Kleinst-Quadrate-Methode im einfachen linearen Regressionsmodell werden $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$ so bestimmt, dass die Summe der quadrierten horizontalen Abstände der Beobachtungspunkte zur Regressionsgeraden möglichst klein ausfällt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Aufgabe 2** (15 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Konfidenzintervalle für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz sind umso breiter,

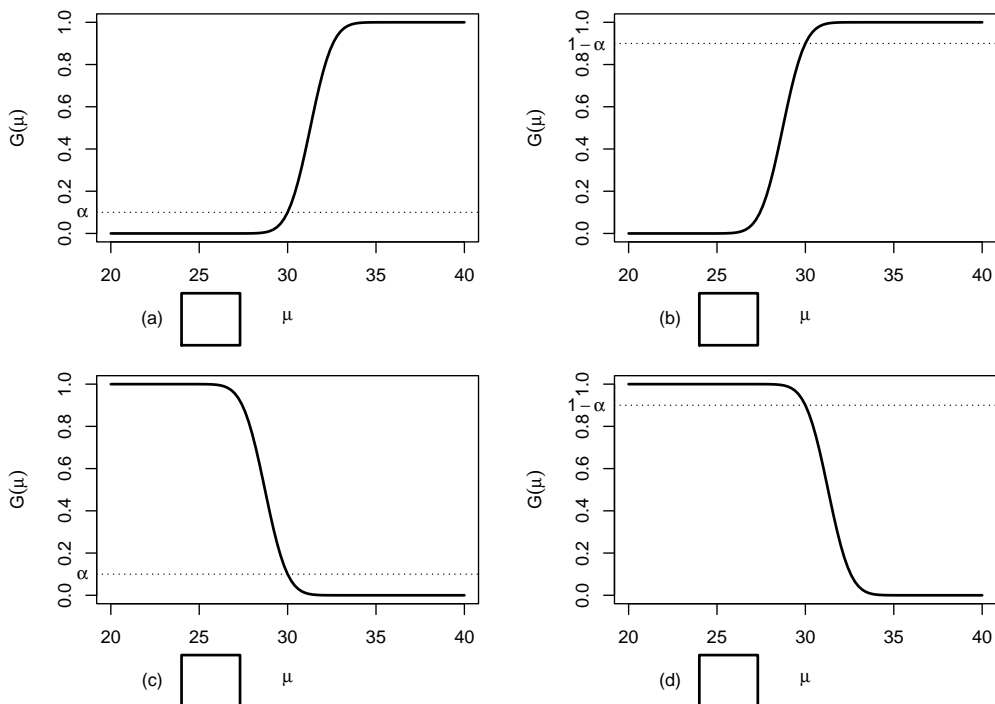
- (a) je kleiner der Stichprobenumfang und je kleiner die Varianz ist.
- (b) je kleiner der Stichprobenumfang und je größer die Varianz ist.
- (c) je größer der Stichprobenumfang und je kleiner die Varianz ist.
- (d) je größer der Stichprobenumfang und je größer die Varianz ist.

2. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_{25}$  vom Umfang  $n = 25$  zu einer  $N(\mu, 5^2)$ -verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 30 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < 30$$

bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  betrachtet.

Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



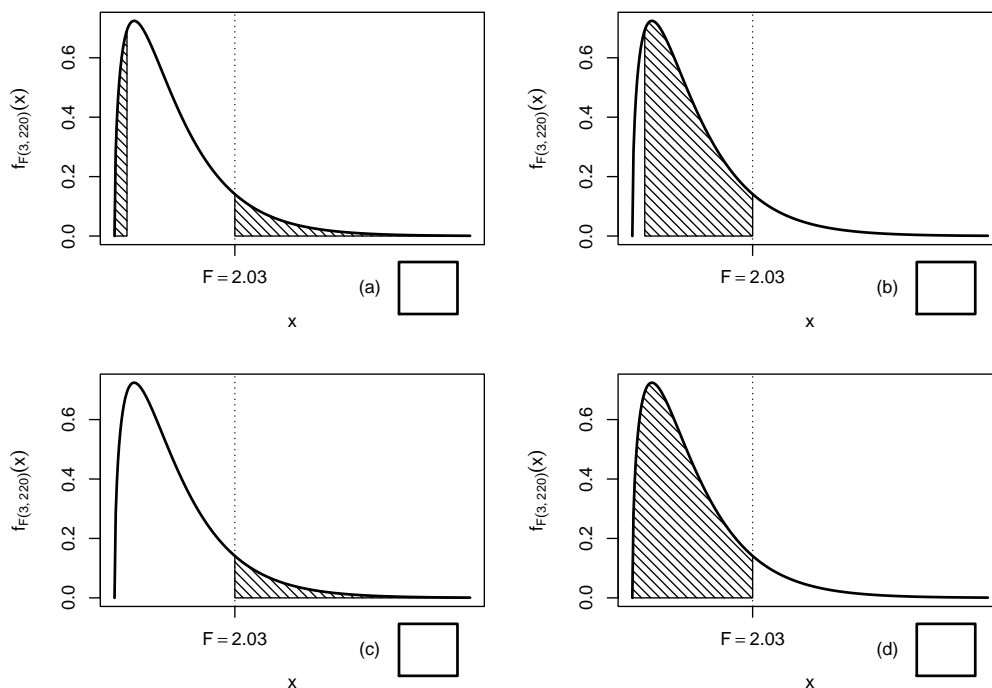
3. Bei der Durchführung eines zweiseitigen Gauß-Tests zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.025$  kann die Nullhypothese  $\mu = \mu_0$  nicht abgelehnt werden, während ein linksseitiger Gauß-Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  auf Grundlage derselben Stichprobeninformation  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  ablehnt. Damit gilt für den  $p$ -Wert des *zweiseitigen* Gauß-Tests stets:

- (a)  $p \geq 0.10$
- (b)  $0.025 \leq p < 0.10$
- (c)  $0.05 \leq p < 0.10$
- (d)  $0.025 \leq p < 0.05$

4. Es sei  $X_1, \dots, X_{81}$  eine einfache Stichprobe vom Umfang 81 zu  $Y$  mit  $Y \sim N(16, 18^2)$ . Dann gilt für die Teststatistik  $N = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$  des Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz zur Nullhypothese  $H_0 : \mu = 20$ :

- (a)  $N \sim N(-4, 1)$
- (b)  $N \sim N(-2, 2^2)$
- (c)  $N \sim N(-4, 2^2)$
- (d)  $N \sim N(-2, 1)$

5. Bei der Durchführung einer einfachen Varianzanalyse mit  $k = 4$  Faktorstufen und einem Gesamtstichprobenumfang von  $n = 224$  erhält man die realisierte Teststatistik  $F = 2.03$ . Markieren Sie die Abbildung, welche den  $p$ -Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter  $H_0$  darstellt.



**Aufgabe 3** (6 + 3 + 1 = 10 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters  $a > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

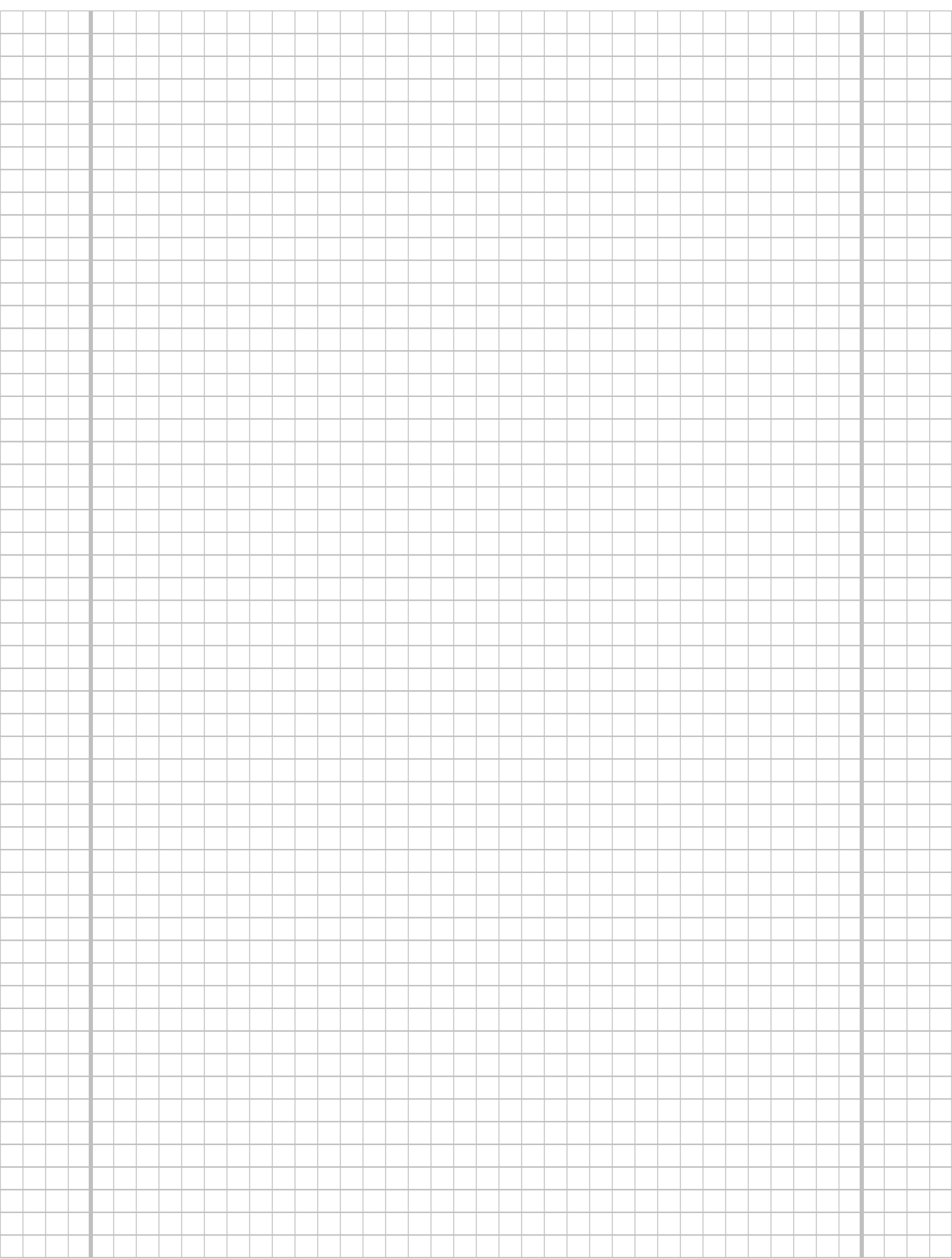
$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \frac{5 \cdot a^5}{y^6} & \text{für } y \geq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

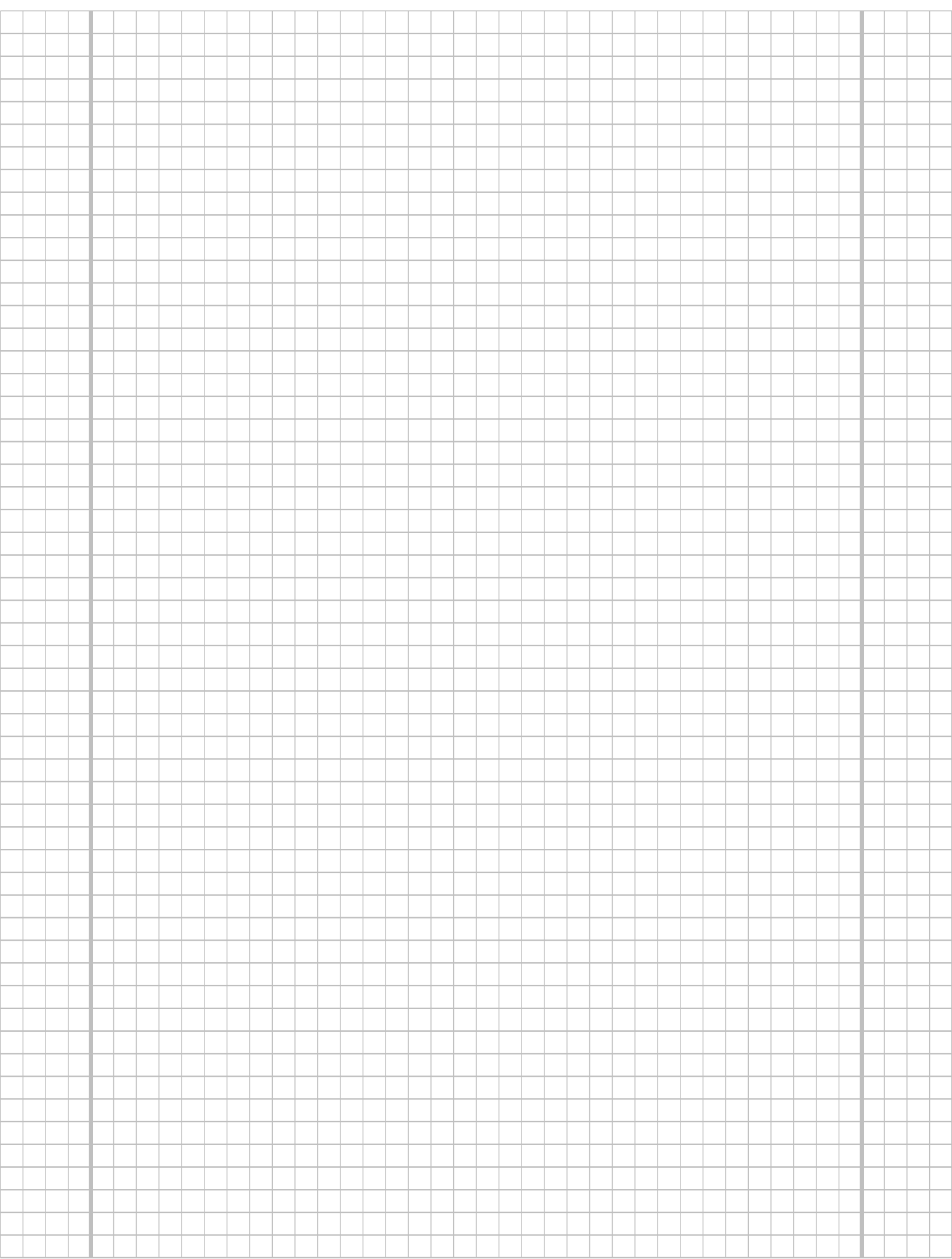
Der Parameter  $a$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

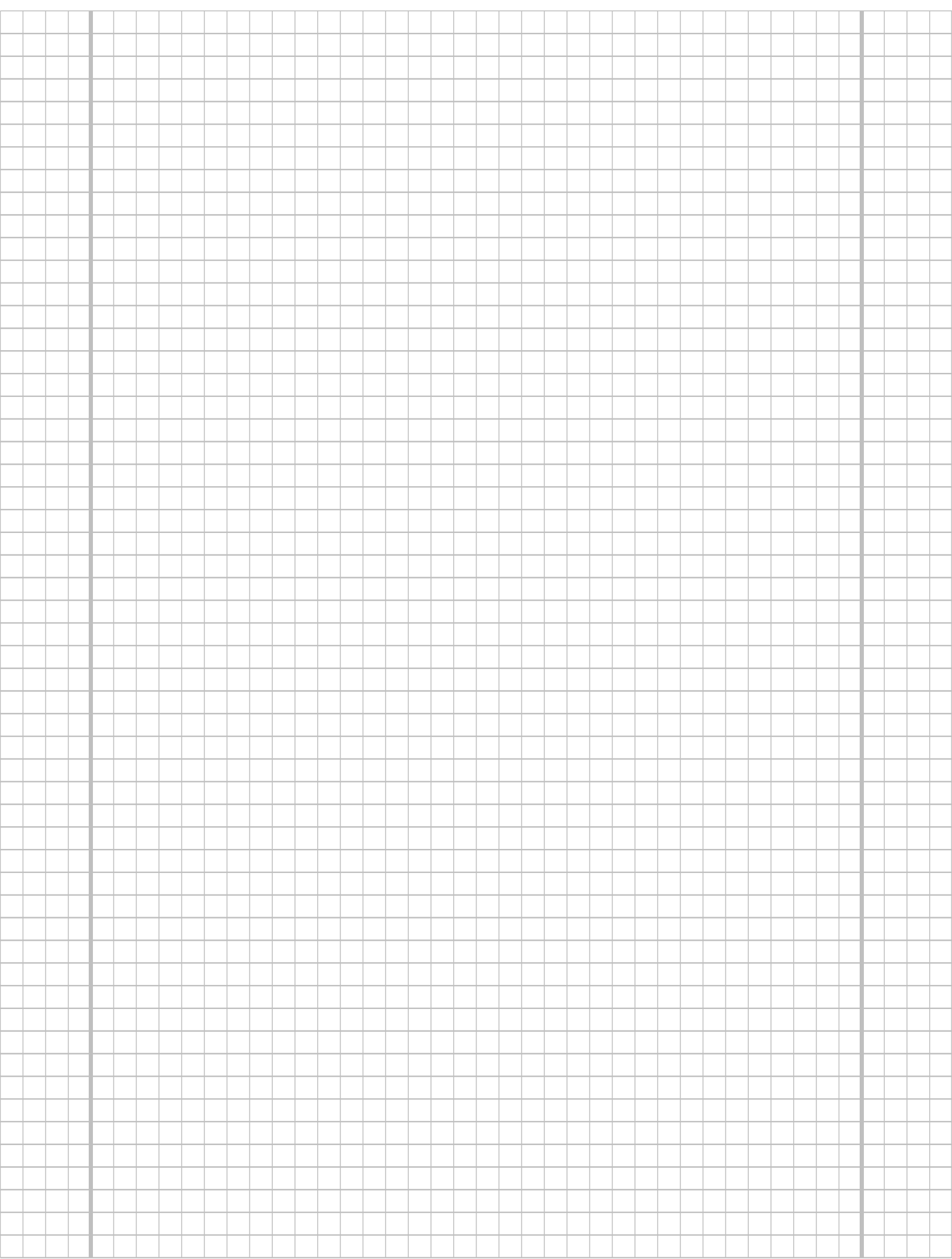
- (a) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.
- (b) Zeigen Sie, dass  $E(Y) = \frac{5}{4} \cdot a$  gilt.
- (c) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{MM}$  nach der Methode der Momente.

*Hinweise:*

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) und Teil (c) ohne die Bearbeitung der Teile (a) und (b) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.







**Aufgabe 4** (7 + 2 + 3 + 7 = 19 Punkte)

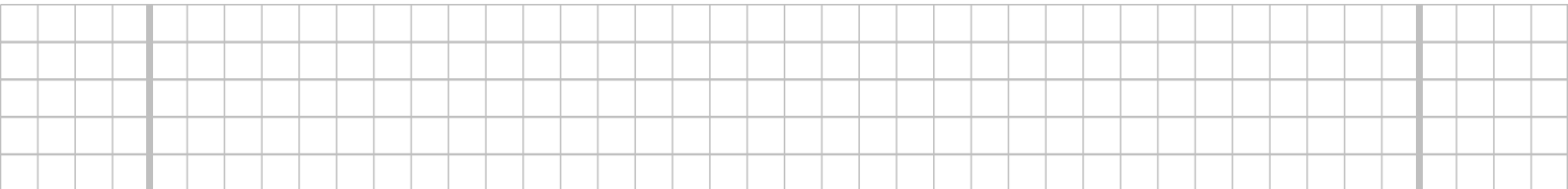
Bei der Herstellung von Kaffekapseln weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Abfüllmaschine eine Standardabweichung von  $0.3[g]$  für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllmaschine im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten  $7[g]$  in die Kapseln abfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 36 Kapseln entnommen, deren gemessene Kaffeepulvermengen  $x_1, \dots, x_{36}$  als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 36 zur annahmegemäß  $N(\mu, 0.3^2[g^2])$ -verteilten abgefüllten Menge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

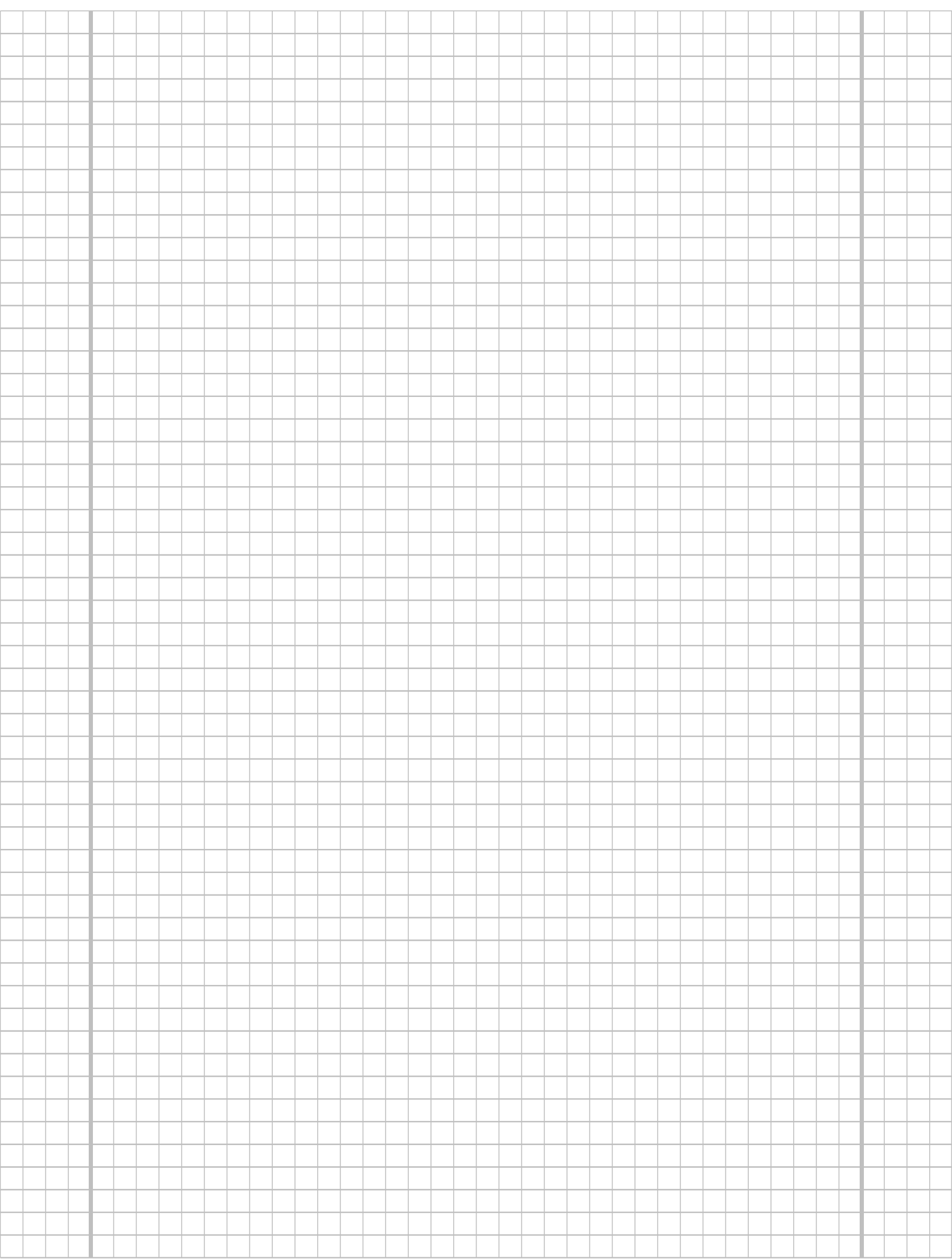
$$\bar{x} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} x_i = 6.907[g].$$

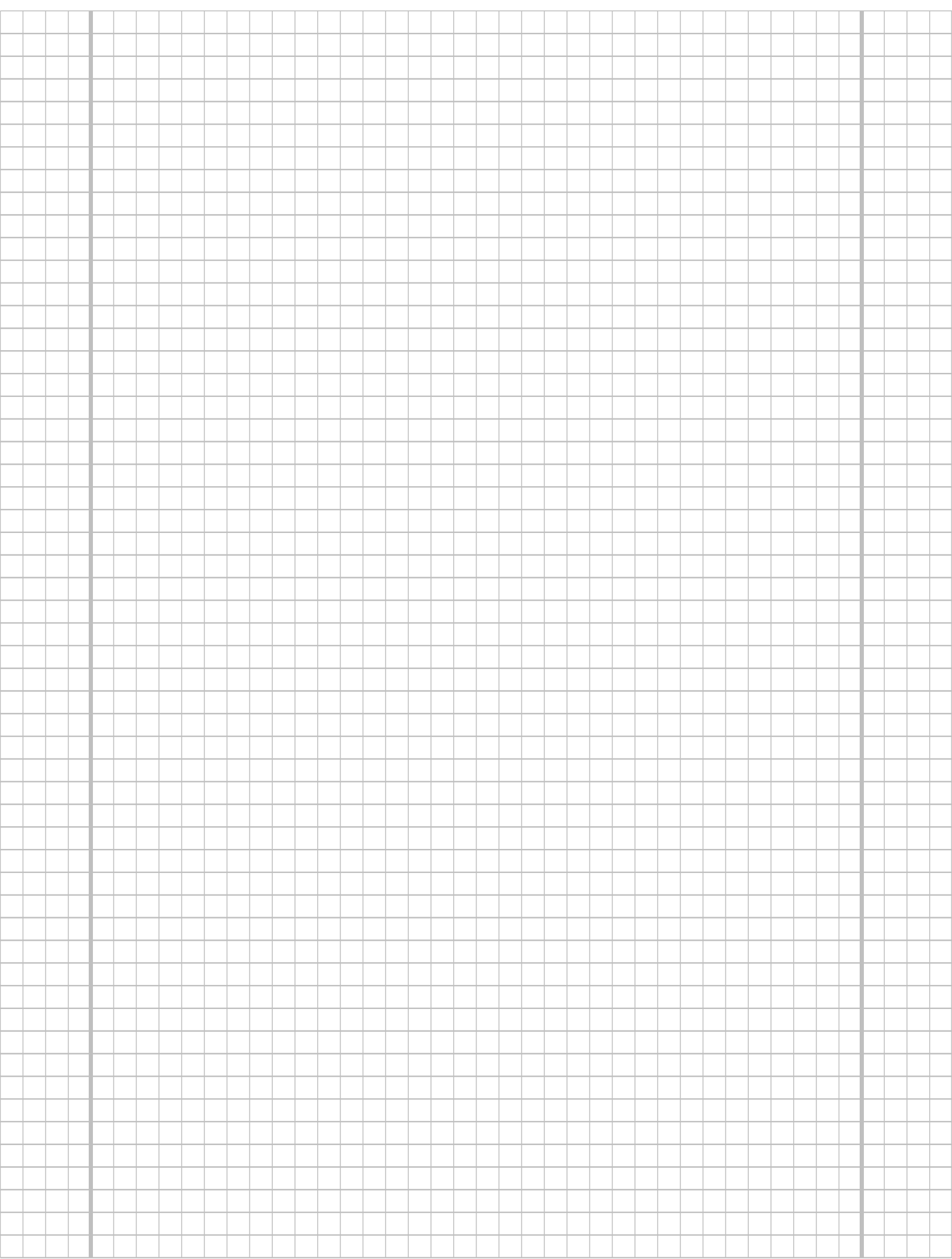
- Testen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.
- Berechnen Sie den  $p$ -Wert zum Test aus Teil (a). Wie wäre die Entscheidung zum Test aus Teil (a) bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.01$  ausgefallen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (a) eine Testentscheidung zu Gunsten der Nullhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge  $6.85[g]$  beträgt?
- Überprüfen Sie unter Verwendung der Varianzschätzung  $s^2 = 0.0944$  mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob die oben getroffene Annahme  $\sigma^2 = 0.3^2$  aus statistischer Sicht zu verwerfen ist. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

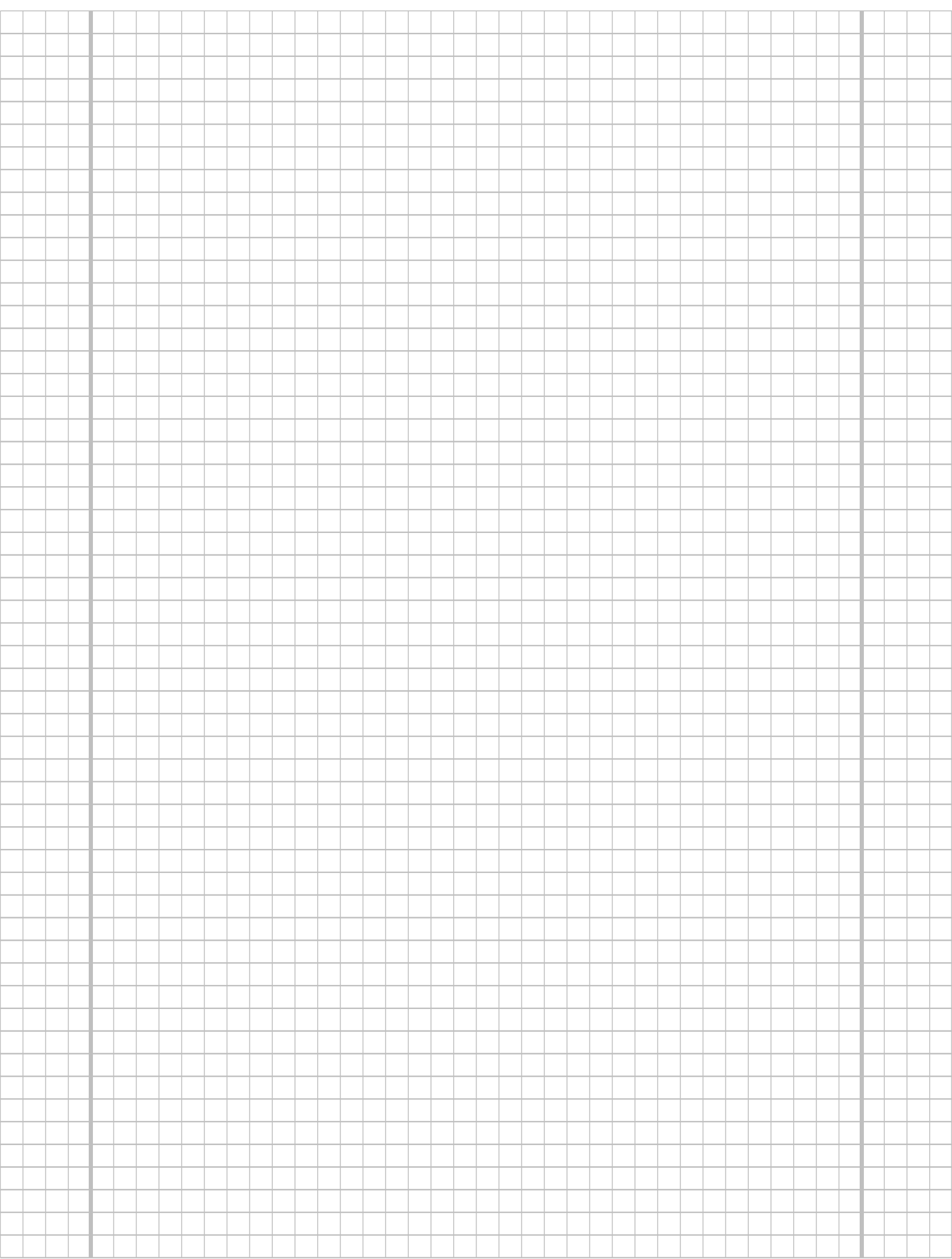
*Hinweis: Verwenden Sie für Teil (d) den folgenden Tabellenausschnitt mit  $p$ -Quantilen von  $\chi^2(n)$ -Verteilungen*

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
31	15.655	17.539	19.281	30.336	41.422	44.985	48.232	52.191
32	16.362	18.291	20.072	31.336	42.585	46.194	49.480	53.486
33	17.074	19.047	20.867	32.336	43.745	47.400	50.725	54.776
34	17.789	19.806	21.664	33.336	44.903	48.602	51.966	56.061
35	18.509	20.569	22.465	34.336	46.059	49.802	53.203	57.342
36	19.233	21.336	23.269	35.336	47.212	50.998	54.437	58.619
37	19.960	22.106	24.075	36.336	48.363	52.192	55.668	59.893
38	20.691	22.878	24.884	37.335	49.513	53.384	56.896	61.162
39	21.426	23.654	25.695	38.335	50.660	54.572	58.120	62.428
40	22.164	24.433	26.509	39.335	51.805	55.758	59.342	63.691







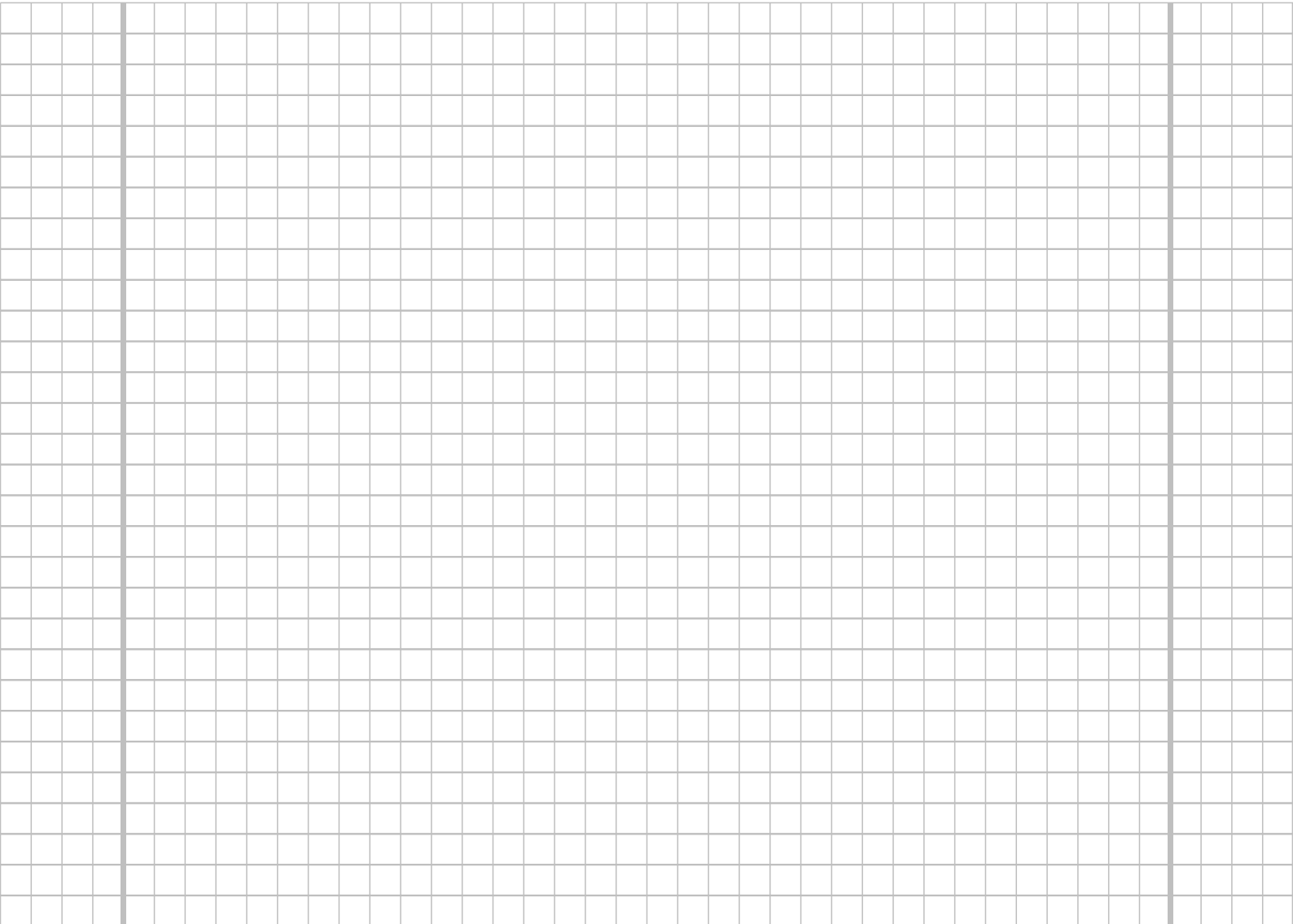


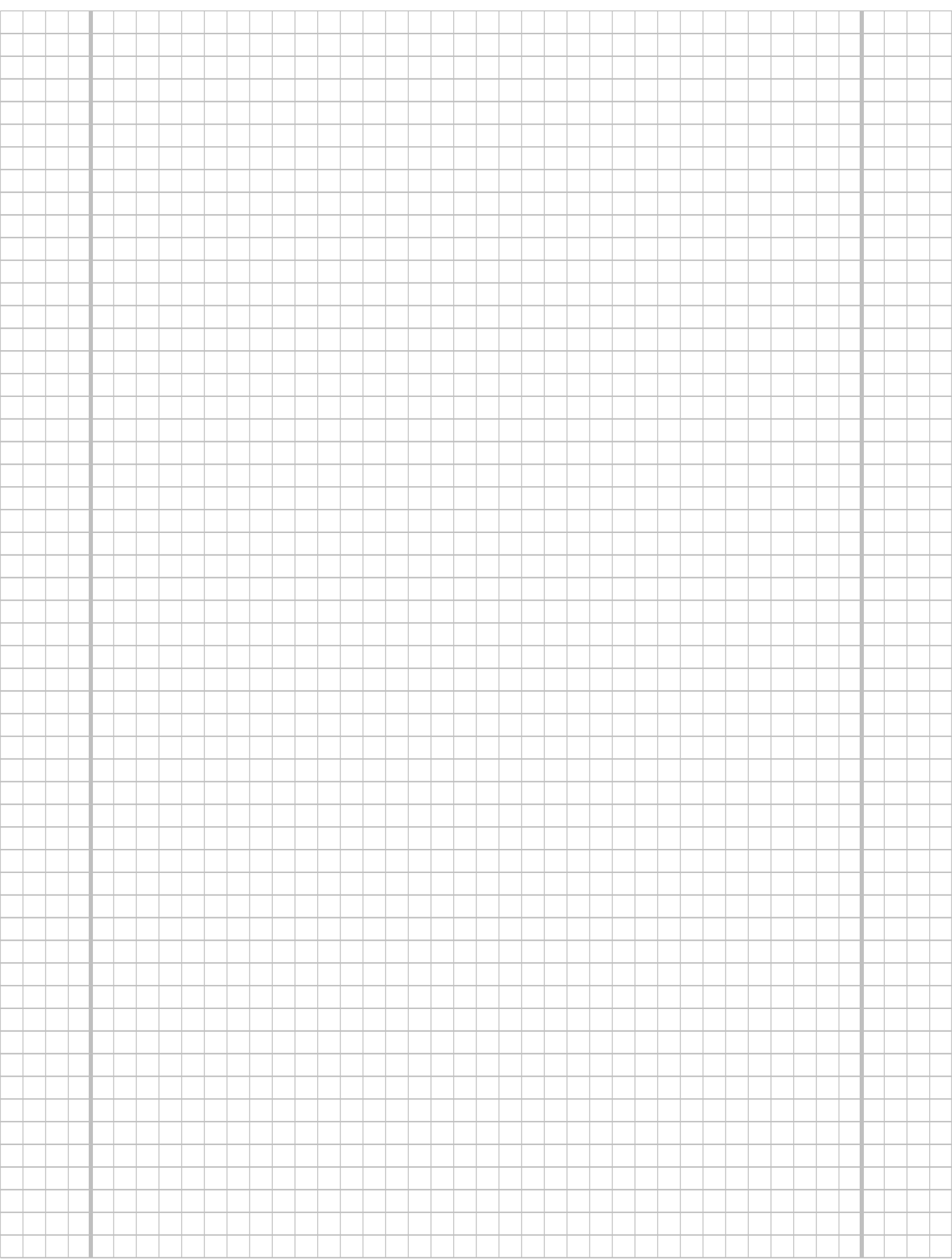
**Aufgabe 5** (11 Punkte)

Um zu überprüfen, ob sich die Leistungsfähigkeit von LiFePo4-Akkus zweier verschiedener Marken unterscheidet, lässt ein Testinstitut die Ausdauer jeweils eines (vollgeladenen) Akkus beim Betrieb von 9 unterschiedlichen Kompressorkühlboxen untersuchen. Es wurden dabei die folgenden Laufzeiten (in Stunden) bis zur automatischen Abschaltung der Kühlboxen festgestellt:

Kühlbox $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Marke $A$ $x_i^A$	99.2	110.7	98.8	102.3	103.7	119.1	113.4	108.7	111.8
Marke $B$ $x_i^B$	106.6	105.3	94.5	96.5	99	110.8	107.8	111.3	96.6

Überprüfen Sie unter der Annahme, dass die gemessenen Laufzeiten aus einer einfachen Stichprobe zur zweidimensional normalverteilten Grundgesamtheit  $(Y^A, Y^B)$  der Laufzeiten mit Akkumarke  $A$  ( $Y^A$ ) bzw. Akkumarke  $B$  ( $Y^B$ ) stammen, zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  die Hypothese, dass die Verwendung von Akkumarke  $A$  im Vergleich zu Akkumarke  $B$  durchschnittlich eine höhere Laufzeit ermöglicht. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.





**Aufgabe 6** (13 Punkte)

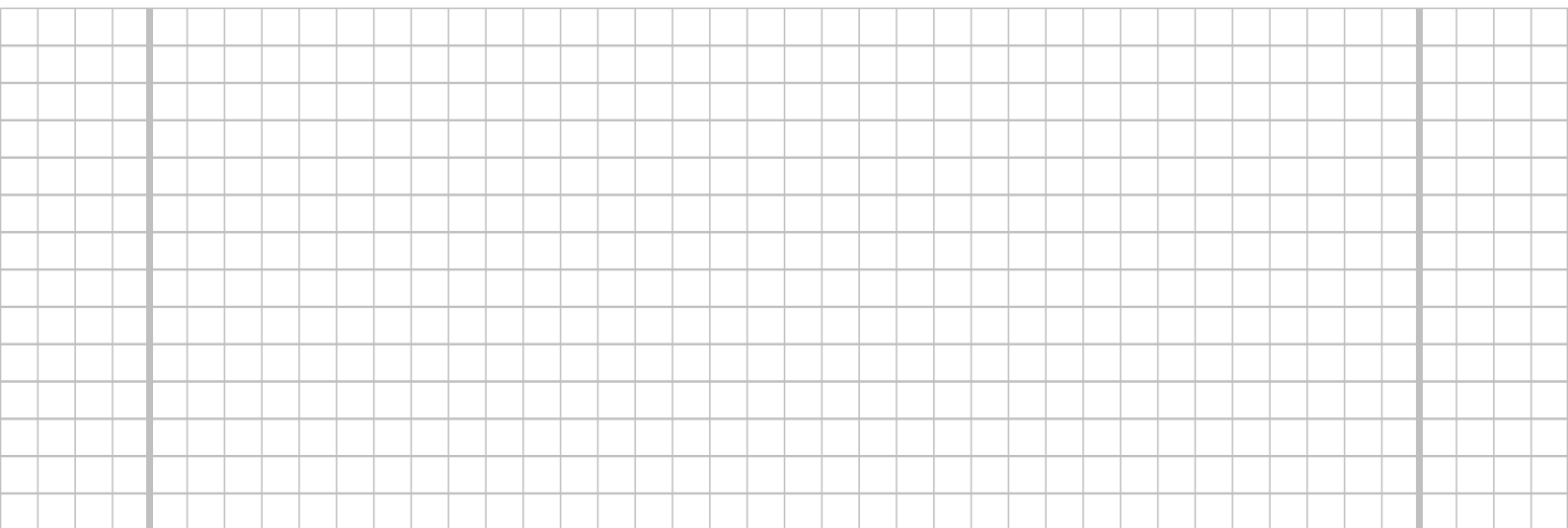
Um zu überprüfen, ob es einen Zusammenhang zwischen den täglichen Renditen des DAX und des DJIA gibt, wurden die qualitativen Bewegungen des DAX und des DJIA an 250 Handelstagen, die man als Realisation einer einfachen Stichprobe auffassen können soll, in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

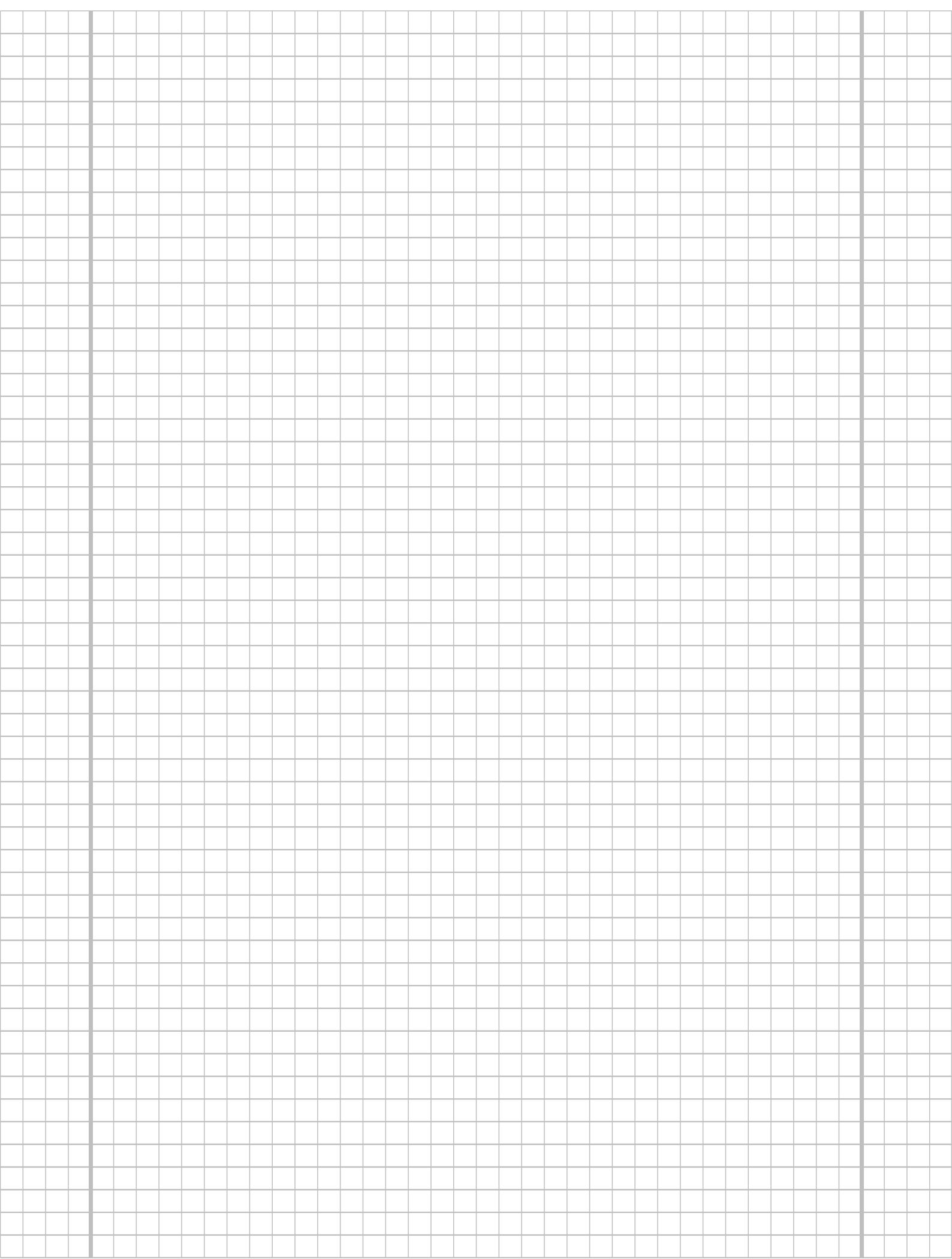
	DJIA gesunken	DJIA nicht gesunken
DAX gesunken	72	45
DAX nicht gesunken	44	89

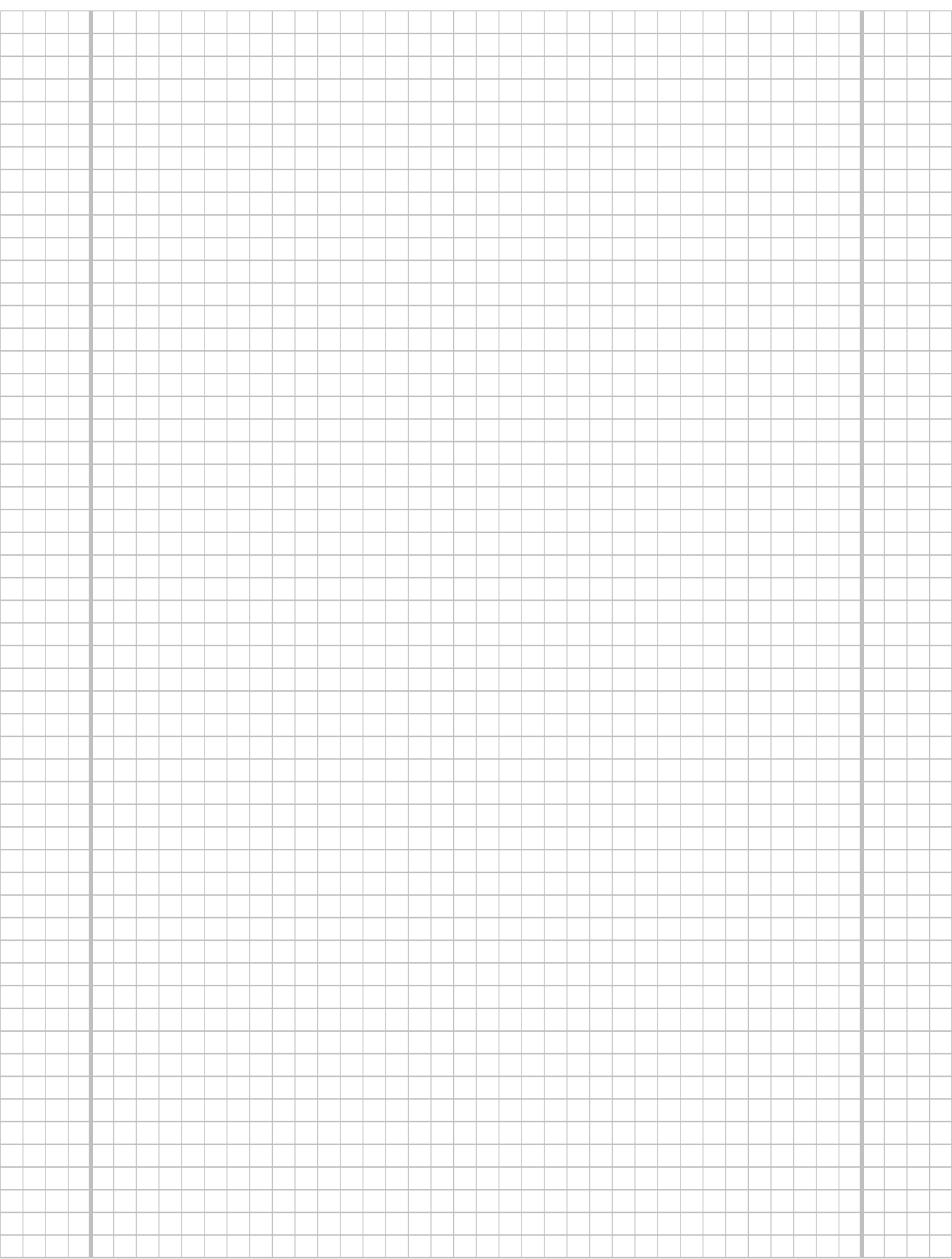
Überprüfen Sie anhand dieses Datenmaterials zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob eine stochastische Abhängigkeit zwischen den qualitativen täglichen Bewegungen des DAX und des DJIA besteht. Formulieren Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz!

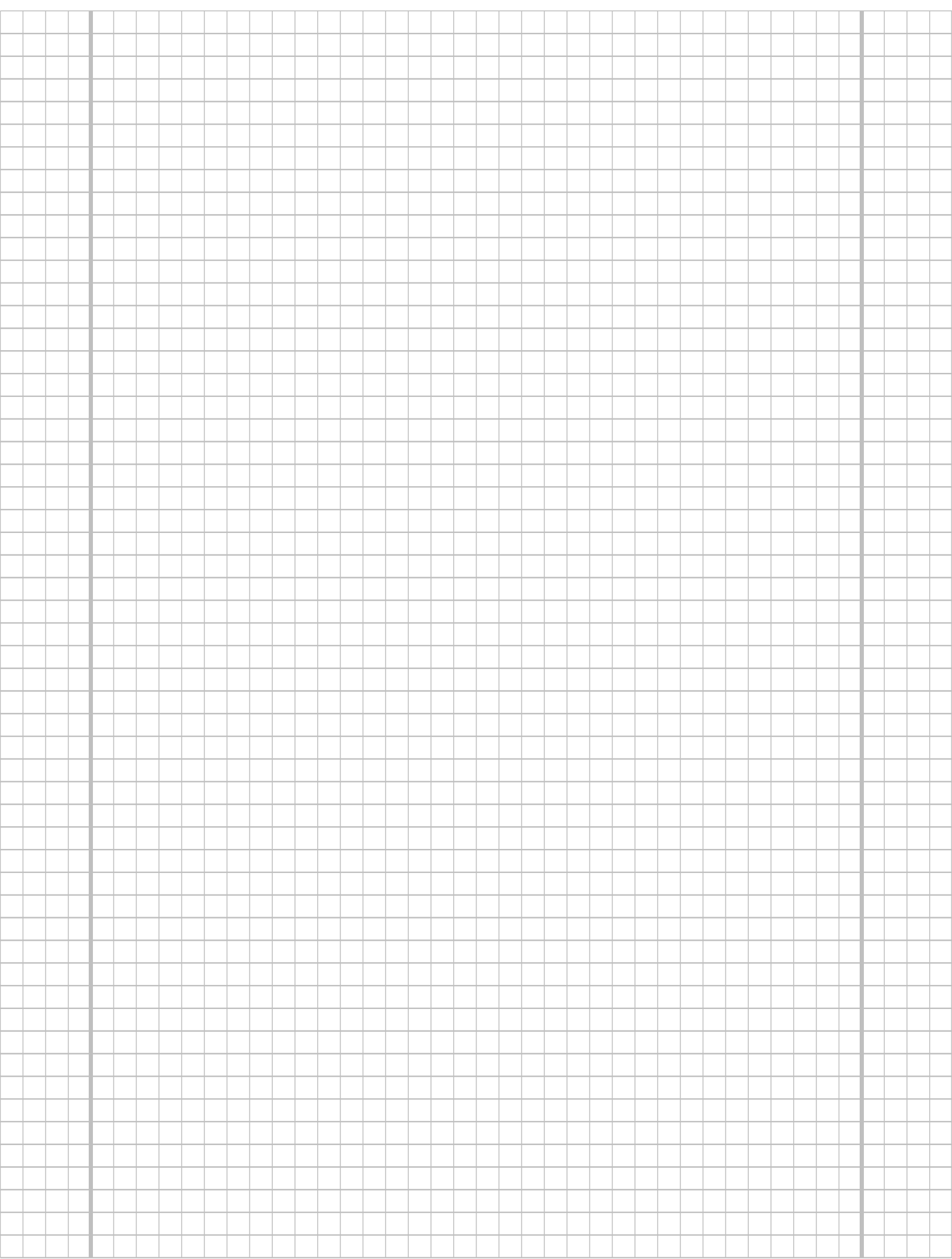
*Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit  $p$ -Quantilen von  $\chi^2(n)$ -Verteilungen:*

$n \setminus p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209









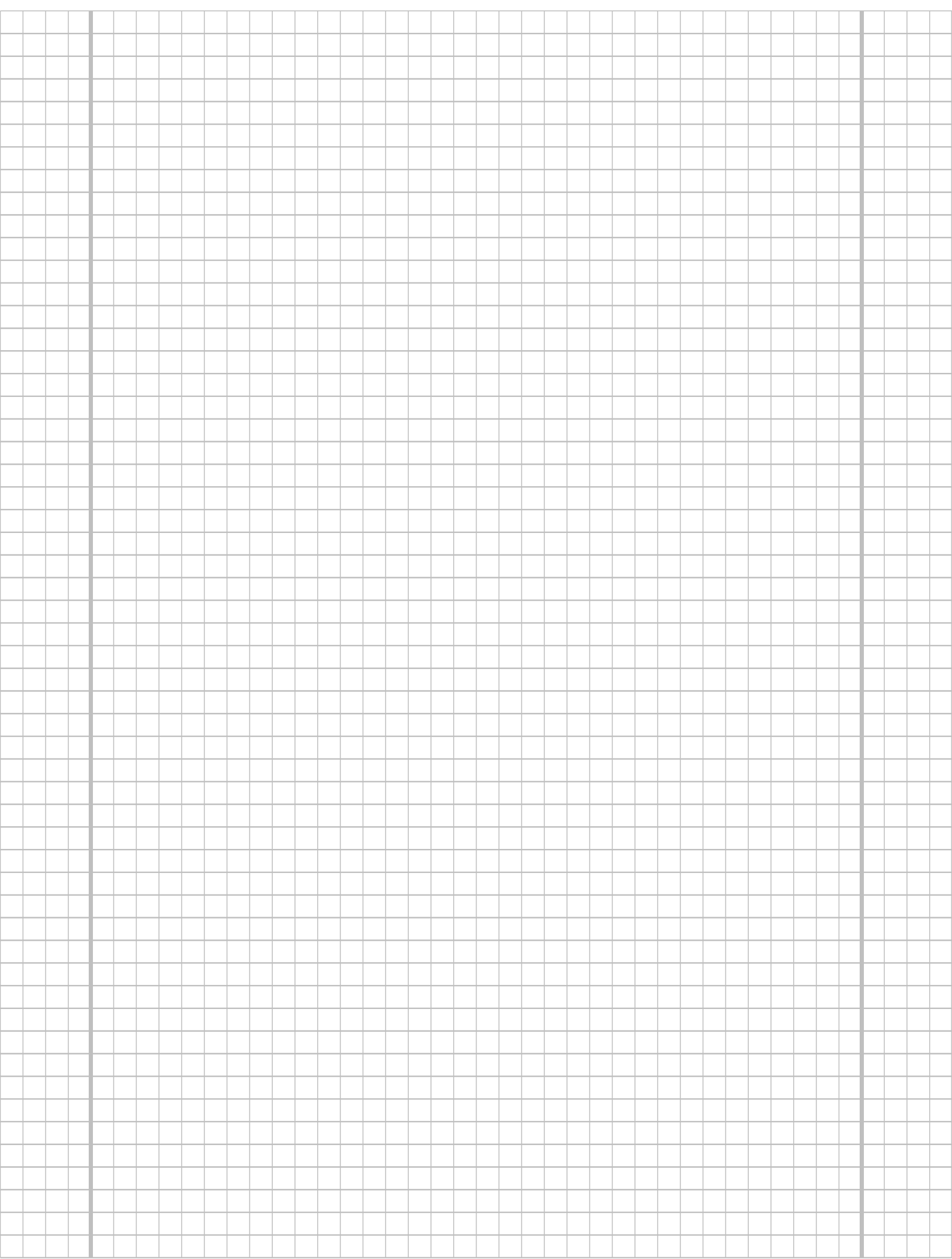
**Aufgabe 7** (7 Punkte)

Zur Beurteilung der Präzision zweier Messgeräte  $A$  und  $B$  wird eine Referenzgröße jeweils unabhängig voneinander mit beiden Messgeräten wiederum jeweils unabhängig voneinander mehrfach gemessen. Es werde angenommen, dass die gemessenen Werte  $Y^A$  bzw.  $Y^B$  der beiden Messgeräte jeweils normalverteilt seien mit unbekanntem Erwartungswerten  $\mu_A$  bzw.  $\mu_B$  sowie unbekanntem Varianzen  $\sigma_A^2$  bzw.  $\sigma_B^2$ . Die Ergebnisse der wiederholten Messungen lassen sich als (voneinander unabhängige) einfache Stichproben  $X_1^A, \dots, X_{16}^A$  vom Umfang 16 zu  $Y^A$  sowie  $X_1^B, \dots, X_{19}^B$  vom Umfang 19 zu  $Y^B$  auffassen, aus den zugehörigen Realisationen wurden bereits die Mittelwerte  $\bar{x}^A = 200.1491$  bzw.  $\bar{x}^B = 200.1277$  sowie die Stichprobenvarianzen  $s_{Y^A}^2 = 0.447$  bzw.  $s_{Y^B}^2 = 0.9404$  berechnet. Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob Messgerät  $A$  eine höhere Präzision (im Sinne einer geringeren Streuung) als Messgerät  $B$  hat. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

*Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95-Quantilen von  $F(m, n)$ -Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel  $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$ .*

$n \setminus m$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124





**Aufgabe 8** (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Zur Erklärung der (diskreten) Wochenrenditen der Bechtle AG  $y_i$  durch die (diskreten) Wochenrenditen des DAX  $x_i$  unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Aus den Daten zu 26 aufeinanderfolgenden Wochen der zweiten Jahreshälfte 2024 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.053472	-0.020721	-0.004059	0.024279	0.060297

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.014639	0.006843	-2.139	0.0428 *
x	0.874389	0.329576	2.653	0.0139 *

---

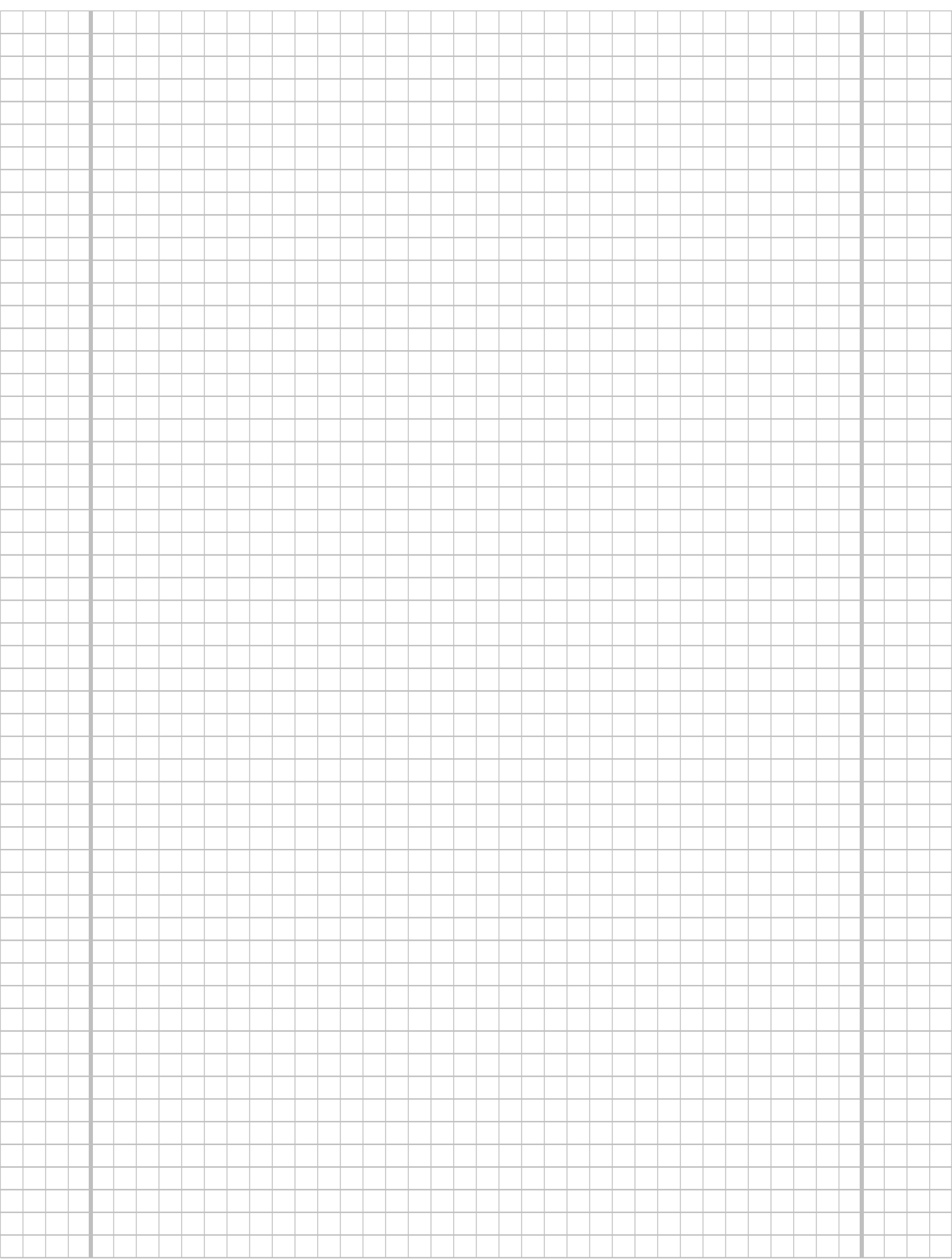
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.03451 on 24 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.2268, Adjusted R-squared: 0.1946

F-statistic: 7.039 on 1 and 24 DF, p-value: 0.01392

- Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für  $\beta_1$  und  $\beta_2$  an.
- Geben Sie den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- Welcher Anteil der Gesamtvarianz der (diskreten) Wochenrenditen der Bechtle AG wird durch das lineare Modell erklärt?
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob  $\beta_1$  signifikant von Null verschieden ist.
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.01$ , ob  $\beta_2$  signifikant positiv ist.
- Welche (diskrete) Wochenrendite der Bechtle AG prognostiziert das Modell in einer Woche mit einer (diskreten) DAX-Rendite von 0.02?



**Aufgabe 9** (6 + 2 + 3 + 5 + 5 = 21 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

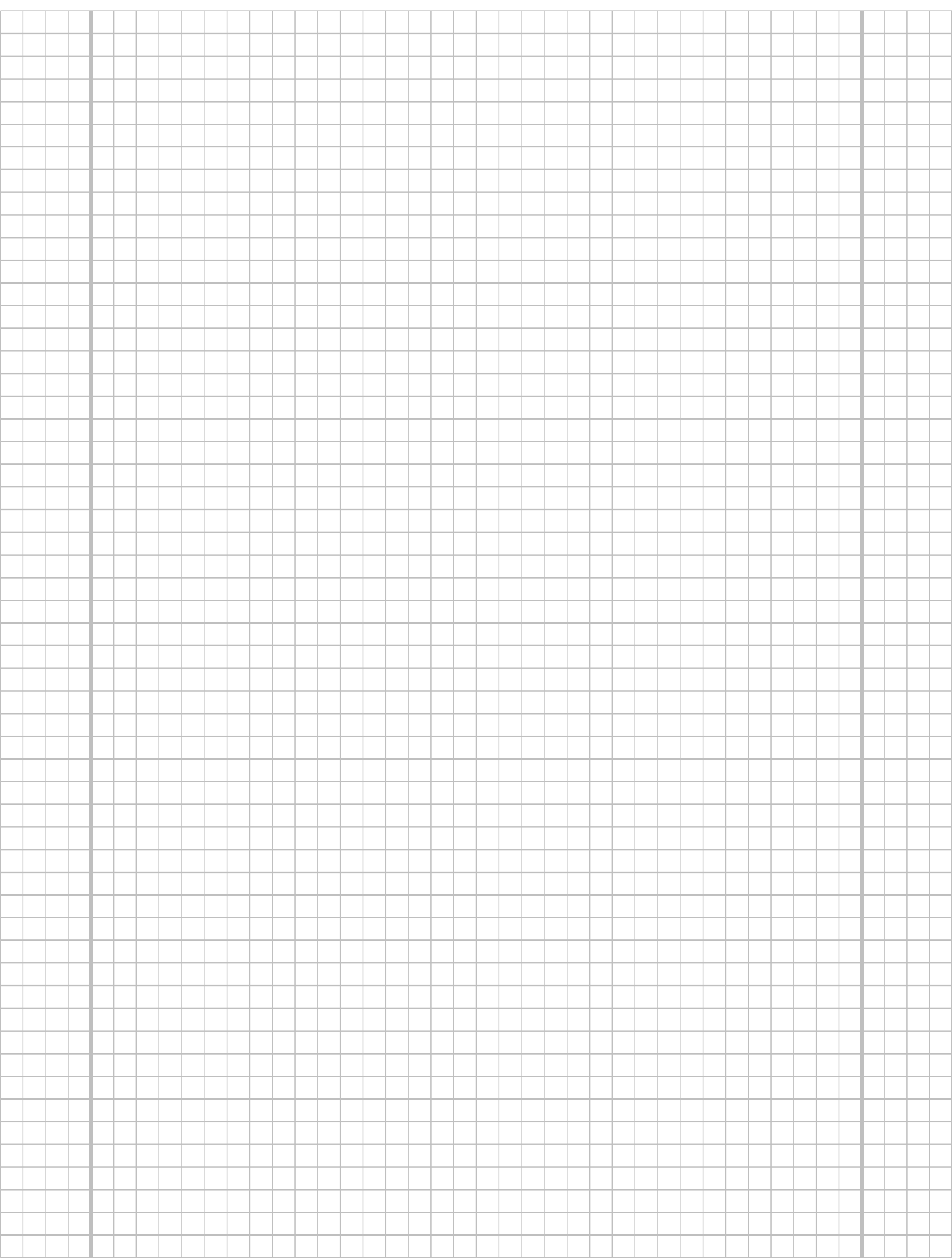
$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

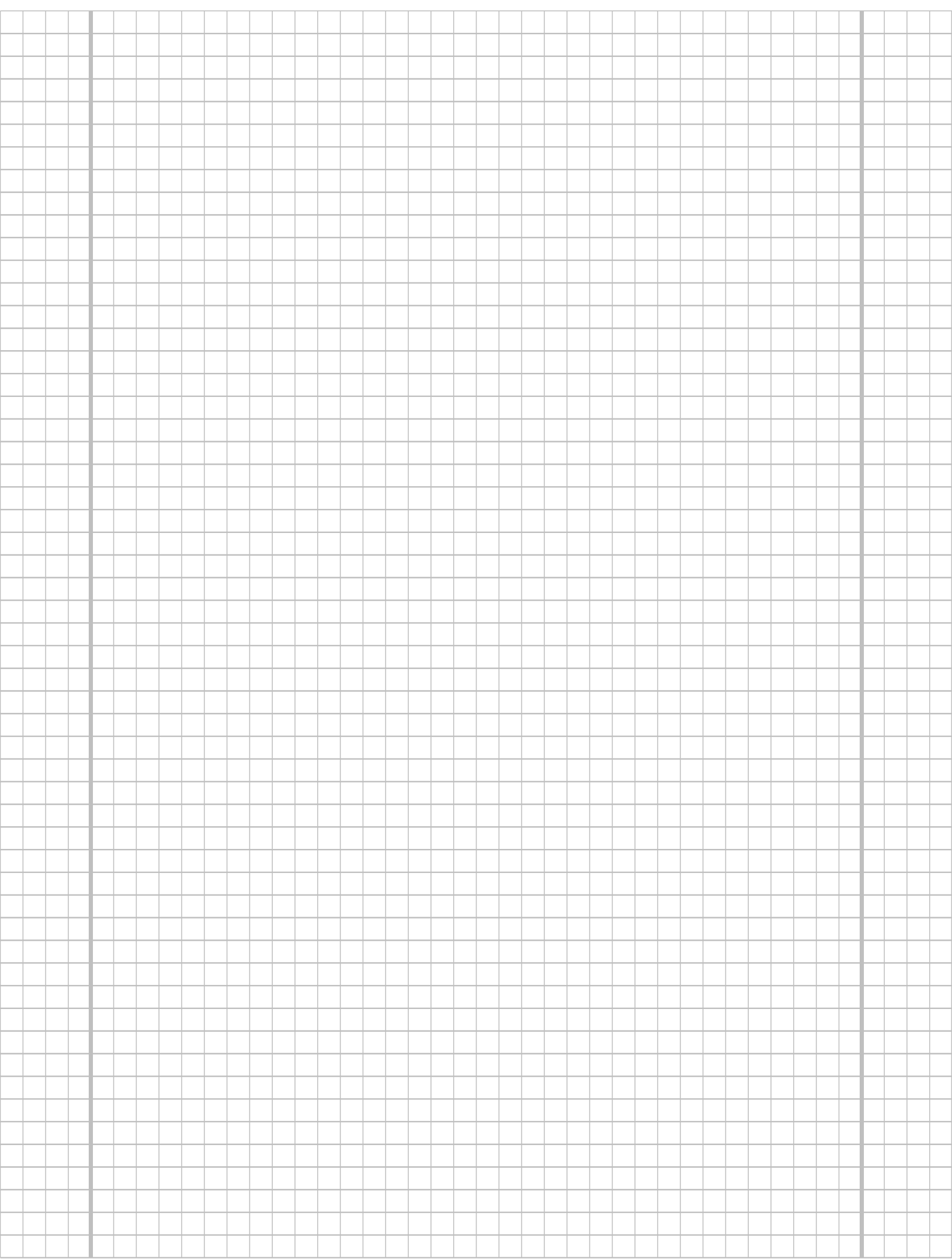
aus einer Stichprobe vom Umfang  $n = 32$  wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

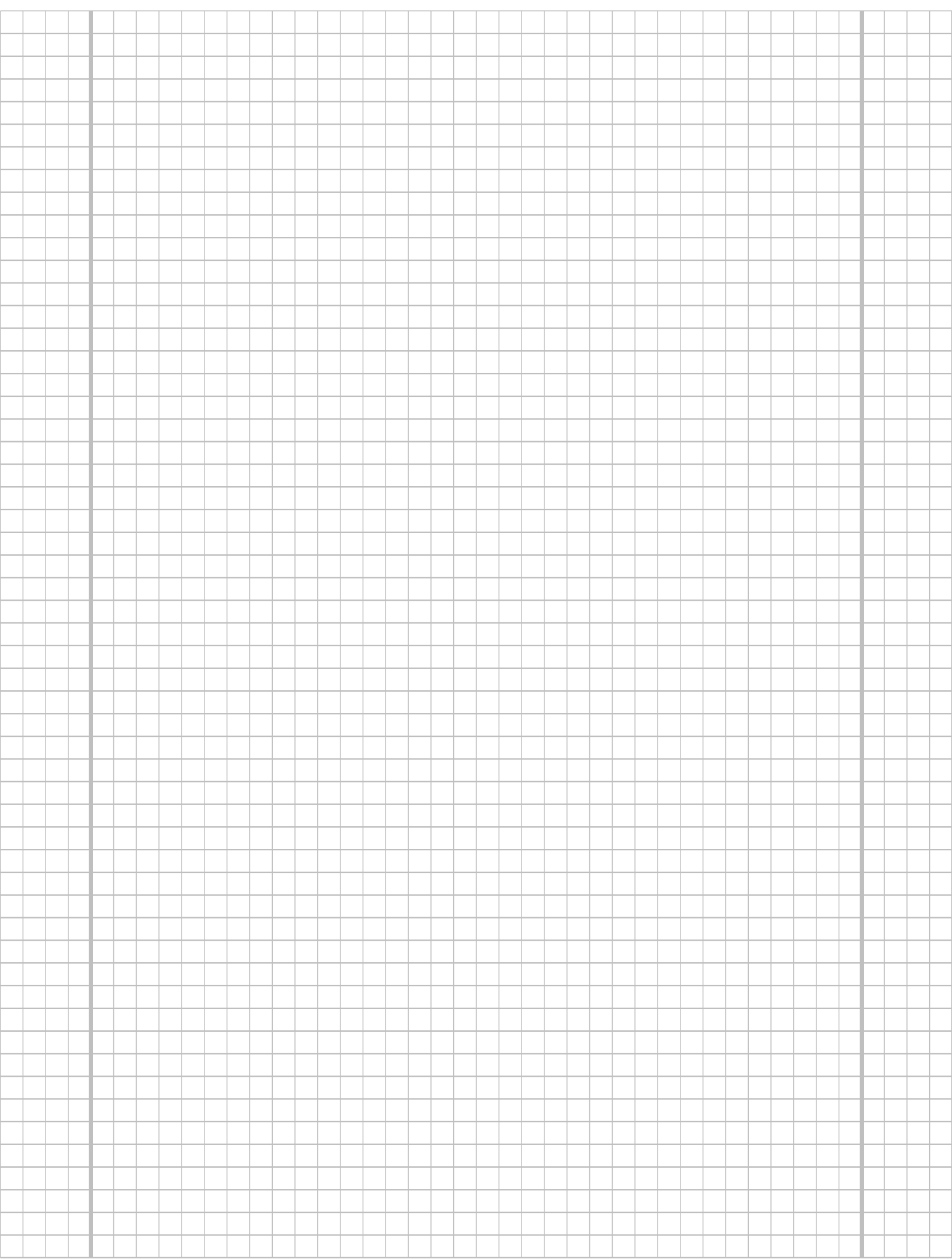
$$\sum_{i=1}^{32} y_i = 371.06; \quad \sum_{i=1}^{32} y_i^2 = 5151.98; \quad \sum_{i=1}^{32} x_i = 34.26;$$

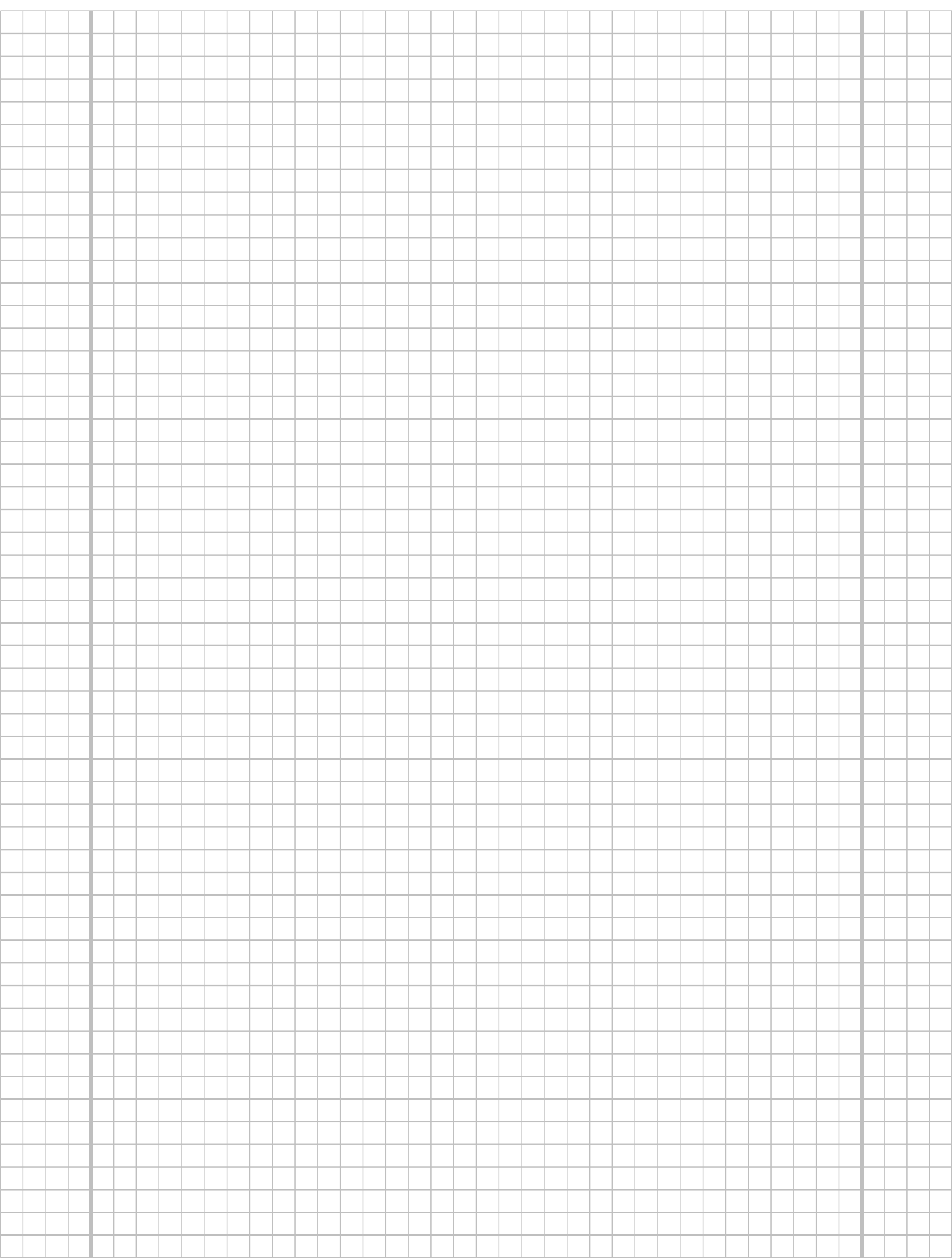
$$\sum_{i=1}^{32} x_i^2 = 74.45; \quad \sum_{i=1}^{32} x_i \cdot y_i = 513.19$$

- (a) Schätzen Sie  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.
- (b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für  $\sigma^2$  den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- (c) Berechnen Sie  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2$  und  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2$ .
- (d) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.01$  (!), ob  $\beta_2$  signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
- (e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.90$  für  $y_0$  gegeben  $x_0 = 2.5$  an.









### Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

### *p*-Quantile der Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(N_p) = p$$

<i>p</i>	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
<i>N<sub>p</sub></i>	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

**$p$ -Quantile der  $t(n)$ -Verteilungen  $t_{n;p}$**

$$T \sim t(n) \quad \Rightarrow \quad F_T(t_{n;p}) = p$$

$n \setminus p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
31	1.054	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.633
32	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.622
33	1.053	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.611
34	1.052	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.601
35	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
80	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
100	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
120	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
140	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.361
160	1.040	1.287	1.654	1.975	2.350	2.607	3.352
180	1.039	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603	3.345
200	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.340
250	1.039	1.285	1.651	1.969	2.341	2.596	3.330