

Zusammenfassung: Gauß-Test für den Mittelwert

bei bekannter Varianz

Anwendungs-voraussetzungen	exakt: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt, σ^2 bekannt approximativ: $E(Y) = \mu \in \mathbb{R}$ unbekannt, $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ bekannt $X_1, \dots, X_n$ einfache Stichprobe zu Y		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$
Teststatistik	$N = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$		
Verteilung (H_0)	N für $\mu = \mu_0$ (näherungsweise) $N(0, 1)$ -verteilt		
Benötigte Größen	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(N_{1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -N_{1-\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot (1 - \Phi(N))$	$1 - \Phi(N)$	$\Phi(N)$

Zusammenfassung: χ^2 -Test für die Varianzeiner normalverteilten Zufallsvariablen mit **unbekanntem** Erwartungswert

Anwendungs-voraussetzungen	exakt: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt , $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{++}$ unbekannt $X_1, \dots, X_n$ einfache Stichprobe zu Y		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$
Teststatistik	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
Verteilung (H_0)	χ^2 (für $\sigma^2 = \sigma_0^2$) $\chi^2(n-1)$ -verteilt		
Benötigte Größen	$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$ mit $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$[0, \chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2) \cup (\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2, \infty)$	$(\chi_{n-1, 1-\alpha}^2, \infty)$	$[0, \chi_{n-1, \alpha}^2)$
p-Wert	$2 \cdot \min \{ F_{\chi^2(n-1)}(\chi^2), 1 - F_{\chi^2(n-1)}(\chi^2) \}$	$1 - F_{\chi^2(n-1)}(\chi^2)$	$F_{\chi^2(n-1)}(\chi^2)$

Zusammenfassung: t-Differenzentest

Anwendungs-voraussetzungen	exakt: (Y^A, Y^B) gemeinsam (zweidimensional) normalverteilt, $E(Y^A) = \mu_A, E(Y^B) = \mu_B$ sowie Varianzen/Kovarianz unbekannt approx.: $E(Y^A) = \mu_A, E(Y^B) = \mu_B, \text{Var}(Y^A), \text{Var}(Y^B)$ unbek. $(X_1^A, X_2^A), \dots, (X_n^A, X_n^B)$ einfache Stichprobe zu (Y^A, Y^B)		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A \neq \mu_B$	$H_0: \mu_A \leq \mu_B$ $H_1: \mu_A > \mu_B$	$H_0: \mu_A \geq \mu_B$ $H_1: \mu_A < \mu_B$
Teststatistik	$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{n}$		
Verteilung (H_0)	t für $\mu_A = \mu_B$ (näherungsweise) $t(n-1)$ -verteilt		
Benötigte Größen	$X_i = X_i^A - X_i^B$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(t_{n-1, 1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -t_{n-1, 1-\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot (1 - F_{t(n-1)}(t))$	$1 - F_{t(n-1)}(t)$	$F_{t(n-1)}(t)$

Zusammenfassung: F-Test zum Vergleich der Varianzen

zweier normalverteilter Zufallsvariablen

Anwendungs-voraussetzungen	exakt: $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$, $\mu_A, \mu_B, \sigma_A^2, \sigma_B^2$ unbek. $X_1^A, \dots, X_n^A$ einfache Stichprobe zu Y^A , unabhängig von einfacher Stichprobe $X_1^B, \dots, X_m^B$ zu Y^B		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$	$H_0: \sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$ $H_1: \sigma_A^2 > \sigma_B^2$	$H_0: \sigma_A^2 \geq \sigma_B^2$ $H_1: \sigma_A^2 < \sigma_B^2$
Teststatistik	$F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$		
Verteilung (H_0)	F unter H_0 für $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $F(n_A - 1, n_B - 1)$ -verteilt		
Benötigte Größen	$\bar{X}^A = \frac{1}{n_A} \sum_{i=1}^{n_A} X_i^A$, $\bar{X}^B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} X_i^B$ $S_A^2 = \frac{1}{n_A-1} \sum_{i=1}^{n_A} (X_i^A - \bar{X}^A)^2 = \frac{1}{n_A-1} \left(\left(\sum_{i=1}^{n_A} (X_i^A)^2 \right) - n_A \bar{X}^A{}^2 \right)$ $S_B^2 = \frac{1}{n_B-1} \sum_{i=1}^{n_B} (X_i^B - \bar{X}^B)^2 = \frac{1}{n_B-1} \left(\left(\sum_{i=1}^{n_B} (X_i^B)^2 \right) - n_B \bar{X}^B{}^2 \right)$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$[0, F_{n_A-1, n_B-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (F_{n_A-1, n_B-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(F_{n_A-1, n_B-1, 1-\alpha}, \infty)$	$[0, F_{n_A-1, n_B-1, \alpha})$
p-Wert	$2 \cdot \min \{ F_{F(n_A-1, n_B-1)}(F), 1 - F_{F(n_A-1, n_B-1)}(F) \}$	$1 - F_{F(n_A-1, n_B-1)}(F)$	$F_{F(n_A-1, n_B-1)}(F)$

Zusammenfassung: (Approx.) Gauß-Test für Anteilswert p

Anwendungs-voraussetzungen	approximativ: $Y \sim B(1, p)$ mit $p \in [0, 1]$ unbekannt $X_1, \dots, X_n$ einfache Stichprobe zu Y		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p \leq p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p \geq p_0$ $H_1: p < p_0$
Teststatistik	$N = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n}$		
Verteilung (H_0)	N für $p = p_0$ näherungsweise $N(0, 1)$ -verteilt		
Benötigte Größen	$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(N_{1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -N_{1-\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot (1 - \Phi(N))$	$1 - \Phi(N)$	$\Phi(N)$

Zusammenfassung: Chi-Quadrat-Anpassungstest

zur Anpassung an **eine** vorgegebene Verteilung

Anwendungs- voraussetzungen	approximativ: Y beliebig verteilt $X_1, \dots, X_n$ einfache Stichprobe zu Y $k-1$ Klassengrenzen $a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1}$ vorgegeben
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: F_Y = F_0$ $H_1: F_Y \neq F_0$
Teststatistik	$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = n \sum_{i=1}^k \frac{(\frac{n_i}{n} - p_i^0)^2}{p_i^0} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{p_i^0} \right) - n$
Verteilung (H_0)	χ^2 ist näherungsweise $\chi^2(k-1)$ -verteilt, falls $F_Y = F_0$ (Näherung nur vernünftig, falls $np_i^0 \geq 5$ für $i \in \{1, \dots, k\}$)
Benötigte Größen	$p_i^0 = F_0(a_i) - F_0(a_{i-1})$ mit $a_0 := -\infty, a_k := \infty$, $n_i = \# \{ j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j \in (a_{i-1}, a_i] \}$, $i \in \{1, \dots, k\}$
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(\chi_{k-1, 1-\alpha}^2, \infty)$
p-Wert	$1 - F_{\chi^2(k-1)}(\chi^2)$

Zusammenfassung: 2-Stichproben-Gauß-Test

bei bekannten Varianzen

Anwendungs-voraussetzungen	exakt: $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$, σ_A^2, σ_B^2 bekannt $X_1^A, \dots, X_n^A$ einfache Stichprobe zu Y^A , unabhängig von einfacher Stichprobe $X_1^B, \dots, X_m^B$ zu Y^B		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A \neq \mu_B$	$H_0: \mu_A \leq \mu_B$ $H_1: \mu_A > \mu_B$	$H_0: \mu_A \geq \mu_B$ $H_1: \mu_A < \mu_B$
Teststatistik	$N = \frac{\bar{X}^A - \bar{X}^B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}}$		
Verteilung (H_0)	N für $\mu_A = \mu_B$ $N(0, 1)$ -verteilt		
Benötigte Größen	$\bar{X}^A = \frac{1}{n_A} \sum_{i=1}^{n_A} X_i^A$, $\bar{X}^B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} X_i^B$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -N_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (N_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(N_{1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -N_{1-\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot (1 - \Phi(N))$	$1 - \Phi(N)$	$\Phi(N)$

Zusammenfassung: Einfache Varianzanalyse

Anwendungs- voraussetzungen	exakt: $Y_j \sim N(\mu_j, \sigma^2)$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ approximativ: Y_j beliebig verteilt mit $E(Y_j) = \mu_j$, $\text{Var}(Y_j) = \sigma^2$ k unabhängige einfache Stichproben $X_{j,1}, \dots, X_{j,n_j}$ vom Umfang n_j zu Y_j für $j \in \{1, \dots, k\}$, $n = \sum_{j=1}^k n_j$
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: \mu_1 = \mu_j$ für alle $j \in \{2, \dots, k\}$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_j$ für (mindestens) ein $j \in \{2, \dots, k\}$
Teststatistik	$F = \frac{SB/(k-1)}{SW/(n-k)}$
Verteilung (H_0)	F ist (approx.) $F(k-1, n-k)$ -verteilt, falls $\mu_1 = \dots = \mu_k$
Benötigte Größen	$\bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j \cdot \bar{x}_j$, $SB = \sum_{j=1}^k n_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2$, $SW = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{j,i} - \bar{x}_j)^2$
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(F_{k-1, n-k, 1-\alpha}, \infty)$
p-Wert	$1 - F_{F(k-1, n-k)}(F)$

Zusammenfassung: t-Test für den Mittelwert

bei unbekannter Varianz

Anwendungs-voraussetzungen	exakt: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_{++}$ unbekannt approximativ: $E(Y) = \mu \in \mathbb{R}$, $\text{Var}(Y) = \sigma^2 \in \mathbb{R}_{++}$ unbekannt $X_1, \dots, X_n$ einfache Stichprobe zu Y		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$
Teststatistik	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S}} \sqrt{n}$		
Verteilung (H_0)	t für $\mu = \mu_0$ (näherungsweise) $t(n-1)$ -verteilt		
Benötigte Größen	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(t_{n-1, 1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -t_{n-1, 1-\alpha})$
p-Wert	$2 \cdot (1 - F_{t(n-1)}(t))$	$1 - F_{t(n-1)}(t)$	$F_{t(n-1)}(t)$

Zusammenfassung: Chi-Quadrat-Anpassungstest

zur Anpassung an parametrische Verteilungsfamilie

Anwendungs- voraussetzungen	approx.: Y beliebig verteilt, $X_1, \dots, X_n$ einf. Stichprobe zu Y Familie von Verteilungsfunktionen F_θ für $\theta \in \Theta$ vorgegeben $k-1$ Klassengrenzen $a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1}$ vorgegeben		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: F_Y = F_\theta$ für ein $\theta \in \Theta$ $H_1: F_Y \neq F_\theta$ (für alle $\theta \in \Theta$)		
Teststatistik	$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = n \sum_{i=1}^k \frac{(\frac{n_i}{n} - p_i^0)^2}{p_i^0} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{p_i^0} \right) - n$		
Verteilung (H_0)	χ^2 ist unter H_0 näherungsweise $\chi^2(k-r-1)$ -verteilt, wenn $\hat{\theta}$ ML-Schätzer des r -dim. Verteilungsparameters θ auf Basis klassierter Daten ist (Verwendung von $\hat{\theta}$ siehe unten). (Näherung nur vernünftig, falls $np_i^0 \geq 5$ für $i \in \{1, \dots, k\}$)		
Benötigte Größen	$p_i^0 = F_\theta(a_i) - F_\theta(a_{i-1})$ mit $a_0 := -\infty, a_k := \infty$, $n_i = \#\{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j \in [a_{i-1}, a_i]\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(\chi_{k-r-1, 1-\alpha}^2, \infty)$		
p-Wert	$1 - F_{\chi^2(k-r-1)}(\chi^2)$		

Zusammenfassung: 2-Stichproben-t-Test

bei bekannten, aber übereinstimmenden Varianzen

Anwendungs- voraussetzungen	exakt: $Y^A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $Y^B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$, $\mu_A, \mu_B, \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ unbek. approx.: $E(Y^A) = \mu_A$, $E(Y^B) = \mu_B$, $\text{Var}(Y^A) = \text{Var}(Y^B)$ unbekannt $X_1^A, \dots, X_n^A$ einfache Stichprobe zu Y^A unabhängig von einfacher Stichprobe $X_1^B, \dots, X_m^B$ zu Y^B		
Nullhypothese Gegenhypothese	$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A \neq \mu_B$	$H_0: \mu_A \leq \mu_B$ $H_1: \mu_A > \mu_B$	$H_0: \mu_A \geq \mu_B$ $H_1: \mu_A < \mu_B$
Teststatistik	$t = \frac{\bar{X}^A - \bar{X}^B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A} + \frac{S^2}{n_B}}} = \frac{\bar{X}^A - \bar{X}^B}{S} \sqrt{\frac{n_A \cdot n_B}{n_A + n_B}}$		
Verteilung (H_0)	t für $\mu_A = \mu_B$ (näherungsweise) $t(n_A + n_B - 2)$ -verteilt		
Benötigte Größen	$\bar{X}^A = \frac{1}{n_A} \sum_{i=1}^{n_A} X_i^A, \quad \bar{X}^B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} X_i^B,$ $S = \sqrt{\frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_B-1)S_B^2}{n_A + n_B - 2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_A} (X_i^A - \bar{X}^A)^2 + \sum_{i=1}^{n_B} (X_i^B - \bar{X}^B)^2}{n_A + n_B - 2}}$		
Kritischer Bereich zum Niveau α	$(-\infty, -t_{n_A+n_B-2, 1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n_A+n_B-2, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$	$(t_{n_A+n_B-2, 1-\alpha}, \infty)$	$(-\infty, -t_{n_A+n_B-2, 1-\alpha})$
p-Wert	$1 - F_{(n_A+n_B-2)}(t)$	$1 - F_{(n_A+n_B-2)}(t)$	$F_{(n_A+n_B-2)}(t)$