

**3. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2025/26**

Aufgabe 6

Zu der (für ein unbekanntes $\theta > 0$) auf dem Intervall $[0, 2\theta]$ gleichverteilten Zufallsvariablen Y liege die Realisation (x_1, \dots, x_n) einer einfachen Stichprobe (X_1, \dots, X_n) vom Umfang n vor. Anhand dieser Stichprobenrealisation soll der unbekannte Parameter θ geschätzt werden.

- (a) Geben Sie den Schätzer $\hat{\theta}_{MM}$ für θ nach der Methode der Momente an.

Hinweis: Der Erwartungswert von Y darf und sollte durch „scharfes Hinsehen“ ohne Rechnung ermittelt werden.

- (b) Geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{ML}$ für den unbekannten Parameter θ an.

Hinweis: Eine Dichtefunktion von Y ist gegeben durch

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & : y \in [0, 2\theta] \\ 0 & : y \notin [0, 2\theta] \end{cases}.$$

- (c) In der obigen Situation liege die konkrete Stichprobenrealisation

$$(x_1, \dots, x_6) = (0.1, 1.3, 3.0, 0.6, 0.5, 1.7)$$

vor. Berechnen Sie auf der Grundlage dieser Stichprobenrealisation die Schätzwerte $\hat{\theta}_{MM}$ nach der Momenten- und $\hat{\theta}_{ML}$ nach der ML-Methode für θ . Geben Sie die zugehörigen geschätzten Intervalle $[0, 2\hat{\theta}_{MM}]$ und $[0, 2\hat{\theta}_{ML}]$ für den Wertebereich der Gleichverteilung an. Wie beurteilen Sie die Plausibilität des Schätzwertes $\hat{\theta}_{MM}$ der Momenten-Methode?

Aufgabe 7

Es werde angenommen, dass die ein bestimmtes Merkmal einer Grundgesamtheit beschreibende Zufallsvariable Y die folgende Dichte — abhängig von einem unbekannten Parameter $\theta \in \mathbb{R}$ — besitze:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} e^{-(y-\theta)} & \text{falls } y \geq \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine einfache Stichprobe (X_1, \dots, X_n) zu Y ergab die Realisation (x_1, \dots, x_n) . Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für θ .

Aufgabe 8

Das Merkmal Y einer Grundgesamtheit sei alternativverteilt mit Parameter $p \in [0, 1]$, d. h. es gelte

y_i	0	1
$p_Y(y_i p)$	$1 - p$	p

.

(X_1, \dots, X_n) sei eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y . Weiterhin sei

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

der „übliche“ Schätzer für p . Zeigen Sie:

- (a) \hat{p} ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für p .
- (b) Die Varianz von \hat{p} lautet $\frac{p(1-p)}{n}$.
- (c) $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz $\frac{p(1-p)}{n}$ von \hat{p} .

Aufgabe 9

Der Wähleranteil p einer Partei wird von zwei Meinungsforschungsinstituten unabhängig voneinander jeweils durch eine einfache Stichprobe vom Umfang $n_1 = 400$ bzw. $n_2 = 1200$ untersucht. Die Schätzfunktionen für die Wähleranteile in den beiden Stichproben seien (wie üblich) gegeben als die in der jeweiligen Stichprobe beobachteten Anteilswerte und mit \hat{p}_1 bzw. \hat{p}_2 bezeichnet.

(a) Zeigen Sie:

- (i) $\text{Var}(\hat{p}_1) = 3 \cdot \text{Var}(\hat{p}_2)$
- (ii) Für jedes $\lambda \in [0, 1]$ ist die (konvex-)kombinierte Schätzfunktion

$$\hat{p}(\lambda) := \lambda \cdot \hat{p}_1 + (1 - \lambda) \cdot \hat{p}_2$$

erwartungstreu für p .

- (b) Bestimmen Sie $\lambda^* \in [0, 1]$ so, dass $\hat{p}(\lambda^*)$ effizient ist in der Klasse der Schätzfunktionen $\{\hat{p}(\lambda) | \lambda \in [0, 1]\}$.