Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
apl. Prof. Dr. Martin Becker

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2024/25

Aufgabe 10

Zu einer Grundgesamtheit Y mit $E(Y) = \mu$ und $\text{Var}(Y) = \sigma^2 > 0$ sei zur Schätzung von μ aus einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang $n > 1$ (jeweils) die Schätzfunktion

$$\widetilde{\mu}_n := \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$$

definiert, also die Schätzfunktion, die (jeweils) die erste und letzte Beobachtung in der Stichprobe mittelt.

(a) Sind die Schätzfunktionen $\widetilde{\mu}_n$ erwartungstreu für μ? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Ist die Folge der Schätzfunktionen $\widetilde{\mu}_n$ für μ konsistent im quadratischen Mittel? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 11

Für $\lambda > 0$ sei $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ (es gilt also insbesondere $\text{E}(Y) = \text{Var}(Y) = \lambda$), $X_1, \ldots, X_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y.

(a) Zeigen Sie: Die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 - X_i \right)$$

sind erwartungstreu für λ^2.

(b) Welche Eigenschaft müssen die Schätzfunktionen T_n aus Teil (a) außerdem erfüllen, um für λ^2 konsistent im quadratischen Mittel zu sein?
(Die Gültigkeit dieser Eigenschaft ist **nicht** *zu überprüfen!)*

Aufgabe 12

Es sei Y normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel $\overline{X}$ betragsmäßig um nicht mehr als den k-fachen Standardfehler $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ von μ abweicht, also die Wahrscheinlichkeit

$$P\left\{ |\overline{X} - \mu| \leq k \cdot \sigma_{\overline{X}} \right\} ,$$

für $k \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 13

Sei Y normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2. Zu Y sei eine einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n gegeben.

(a) Zeigen Sie: Für die Breite b jedes Konfidenzintervalls für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ gilt in Abhängigkeit von n, σ^2 und α

$$b = \frac{2\sigma N_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

(unabhängig von der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$!).

(b) Nehmen Sie nun an, dass $\sigma^2 = 3^2$ gilt. Wie groß müssen Sie den Stichprobenumfang n einer statistischen Untersuchung mindestens wählen, wenn die Breite der resultierenden Konfidenzintervalle zum Niveau $1-\alpha = 0.95$ für μ den Wert $b_0 = 1$ nicht überschreiten soll.

Aufgabe 14

Ein Papierschneidegerät schneidet von einem durchlaufenden Papierband Stücke ab, die eine bestimmte Länge haben sollen. Diese gewünschte Solllänge μ ist stufenlos einstellbar, doch können bei fest gewählter Einstellung zufällige Schwankungen in der Länge der abgeschnittenen Papierstücke auftreten. Aufgrund langjähriger Erfahrung sieht man diese Schwankungen Y als eine $N(\mu, 2.4^2)$-verteilte Zufallsvariable an. Aus der laufenden Produktion werden zufällig 9 Stücke entnommen und ihre Länge nachgemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte:

295.5, 297.44, 294.99, 300.83, 297.79, 295.03, 298.17, 298.77, 298.38

Man nehme an, dass die obigen Werte Realisationen einer einfachen Stichprobe $(X_1, ..., X_9)$ zur Zufallsvariablen Y sind. Geben Sie die zugehörige Realisation des Konfidenzintervalls für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.95$ an.

Aufgabe 15

12 Filialen eines großen Lebensmittelskonzerns hatten folgende tägliche Umsätze (in Tausend €) zu verzeichnen:

32.87, 36.92, 31.82, 43.98, 37.65, 31.9, 38.44, 39.69, 38.88, 34.47, 43.56, 37.95

Es werde angenommen, dass die obigen Umsätze Realisationen einer einfachen Stichprobe $(X_1, ..., X_{12})$ zu einer normalverteilten Zufallsvariablen Y sind, deren Erwartungswert und Varianz unbekannt sind. Geben Sie zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.99$ ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ an.