Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
apl. Prof. Dr. Martin Becker

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2024/25

Aufgabe 6

Zu der (für ein unbekanntes $\theta > 0$) auf dem Intervall $[0, 2\theta]$ gleichverteilten Zufallsvariablen Y liege die Realisation $(x_1, \dots, x_n)$ einer einfachen Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$ vom Umfang n vor. Anhand dieser Stichprobenrealisation soll der unbekannte Parameter θ geschätzt werden.

(a) Geben Sie den Schätzer $\widehat{\theta}_{MM}$ für θ nach der Methode der Momente an.

Hinweis: Der Erwartungswert von Y darf und sollte durch „scharfes Hinsehen" ohne Rechnung ermittelt werden.

(b) Geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\theta}_{ML}$ für den unbekannten Parameter θ an.

Hinweis: Eine Dichtefunktion von Y ist gegeben durch

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & : \quad y \in [0, 2\theta] \\ 0 & : \quad y \notin [0, 2\theta] \end{cases} .$$

(c) In der obigen Situation liege die konkrete Stichprobenrealisation

$$(x_1, \dots, x_6) = (0.1, 1.3, 3.0, 0.6, 0.5, 1.7)$$

vor. Berechnen Sie auf der Grundlage dieser Stichprobenrealisation die Schätzwerte $\widehat{\theta}_{MM}$ nach der Momenten- und $\widehat{\theta}_{ML}$ nach der ML-Methode für θ. Geben Sie die zugehörigen geschätzten Intervalle $[0, 2\widehat{\theta}_{MM}]$ und $[0, 2\widehat{\theta}_{ML}]$ für den Wertebereich der Gleichverteilung an. Wie beurteilen Sie die Plausibilität des Schätzwertes $\widehat{\theta}_{MM}$ der Momenten-Methode?

Aufgabe 7

Es werde angenommen, dass die ein bestimmtes Merkmal einer Grundgesamtheit beschreibende Zufallsvariable Y die folgende Dichte — abhängig von einem unbekannten Parameter $\theta \in \mathbb{R}$ — besitze:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(y-\theta)} & \text{falls } y \geq \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine einfache Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$ zu Y ergab die Realisation $(x_1, \dots, x_n)$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für θ.

Aufgabe 8

Das Merkmal Y einer Grundgesamtheit sei alternativverteilt mit Parameter $p \in [0,1]$, d. h. es gelte

y_i	0	1
$p_Y(y_i \mid p)$	$1-p$	p

.

$(X_1, \dots, X_n)$ sei eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Weiterhin sei

$$\widehat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

der „übliche" Schätzer für p. Zeigen Sie:

(a) $\widehat{p}$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für p.

(b) Die Varianz von $\widehat{p}$ lautet $\dfrac{p(1-p)}{n}$.

(c) $\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz $\dfrac{p(1-p)}{n}$ von $\widehat{p}$.

Aufgabe 9

Der Wähleranteil p einer Partei wird von zwei Meinungsforschungsinstituten unabhängig voneinander jeweils durch eine einfache Stichprobe vom Umfang $n_1 = 400$ bzw. $n_2 = 1200$ untersucht. Die Schätzfunktionen für die Wähleranteile in den beiden Stichproben seien (wie üblich) gegeben als die in der jeweiligen Stichprobe beobachteten Anteilswerte und mit $\widehat{p}_1$ bzw. $\widehat{p}_2$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Var}(\widehat{p}_1) = 3 \cdot \mathrm{Var}(\widehat{p}_2)$

(ii) Für jedes $\lambda \in [0,1]$ ist die (konvex-)kombinierte Schätzfunktion

$$\widehat{p}(\lambda) := \lambda \cdot \widehat{p}_1 + (1-\lambda) \cdot \widehat{p}_2$$

erwartungstreu für p.

(b) Bestimmen Sie $\lambda^* \in [0,1]$ so, dass $\widehat{p}(\lambda^*)$ effizient ist in der Klasse der Schätzfunktionen $\{\widehat{p}(\lambda) \mid \lambda \in [0,1]\}$.