

4. Übungsblatt zur Vorlesung  
Schließende Statistik WS 2022/23

Aufgabe 10

Zu einer Grundgesamtheit  $Y$  mit  $E(Y) = \mu$  und  $\text{Var}(Y) = \sigma^2 > 0$  sei zur Schätzung von  $\mu$  aus einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n > 1$  (jeweils) die Schätzfunktion

$$\tilde{\mu}_n := \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$$

definiert, also die Schätzfunktion, die (jeweils) die erste und letzte Beobachtung in der Stichprobe mittelt.

- (a) Sind die Schätzfunktionen  $\tilde{\mu}_n$  erwartungstreu für  $\mu$ ? Begründen Sie Ihre Antwort!
- (b) Ist die Folge der Schätzfunktionen  $\tilde{\mu}_n$  für  $\mu$  konsistent im quadratischen Mittel? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 11

Für  $\lambda > 0$  sei  $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$  (es gilt also insbesondere  $E(Y) = \text{Var}(Y) = \lambda$ ),  $X_1, \dots, X_n$  sei für  $n \in \mathbb{N}$  eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n$  zu  $Y$ .

- (a) Zeigen Sie: Die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - X_i)$$

sind erwartungstreu für  $\lambda^2$ .

- (b) Welche Eigenschaft müssen die Schätzfunktionen  $T_n$  aus Teil (a) außerdem erfüllen, um für  $\lambda^2$  konsistent im quadratischen Mittel zu sein?  
(Die Gültigkeit dieser Eigenschaft ist **nicht** zu überprüfen!)

Aufgabe 12

Es sei  $Y$  normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ .  $X_1, \dots, X_n$  sei eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n$  zu  $Y$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel  $\bar{X}$  betragsmäßig um nicht mehr als den  $k$ -fachen Standardfehler  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  von  $\mu$  abweicht, also die Wahrscheinlichkeit

$$P \{ |\bar{X} - \mu| \leq k \cdot \sigma_{\bar{X}} \} ,$$

für  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

### Aufgabe 13

Sei  $Y$  normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  und bekannter Varianz  $\sigma^2$ . Zu  $Y$  sei eine einfache Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  gegeben.

- (a) Zeigen Sie: Für die Breite  $b$  jedes Konfidenzintervalls für  $\mu$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  gilt in Abhängigkeit von  $n$ ,  $\sigma^2$  und  $\alpha$

$$b = \frac{2\sigma N_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

(unabhängig von der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$ !).

- (b) Nehmen Sie nun an, dass  $\sigma^2 = 3^2$  gilt. Wie groß müssen Sie den Stichprobenumfang  $n$  einer statistischen Untersuchung mindestens wählen, wenn die Breite der resultierenden Konfidenzintervalle zum Niveau  $1 - \alpha = 0.95$  für  $\mu$  den Wert  $b_0 = 1$  nicht überschreiten soll.

### Aufgabe 14

Ein Papierschnidegerät schneidet von einem durchlaufenden Papierband Stücke ab, die eine bestimmte Länge haben sollen. Diese gewünschte Solllänge  $\mu$  ist stufenlos einstellbar, doch können bei fest gewählter Einstellung zufällige Schwankungen in der Länge der abgeschnittenen Papierstücke auftreten. Aufgrund langjähriger Erfahrung sieht man diese Schwankungen  $Y$  als eine  $N(\mu, 2.4^2)$ -verteilte Zufallsvariable an. Aus der laufenden Produktion werden zufällig 9 Stücke entnommen und ihre Länge nachgemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte:

295.5, 297.44, 294.99, 300.83, 297.79, 295.03, 298.17, 298.77, 298.38

Man nehme an, dass die obigen Werte Realisationen einer einfachen Stichprobe  $(X_1, \dots, X_9)$  zur Zufallsvariablen  $Y$  sind. Geben Sie die zugehörige Realisation des Konfidenzintervalls für  $\mu$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0.95$  an.

### Aufgabe 15

12 Filialen eines großen Lebensmittelskonzerns hatten folgende tägliche Umsätze (in Tausend €) zu verzeichnen:

32.87, 36.92, 31.82, 43.98, 37.65, 31.9, 38.44, 39.69, 38.88, 34.47, 43.56, 37.95

Es werde angenommen, dass die obigen Umsätze Realisationen einer einfachen Stichprobe  $(X_1, \dots, X_{12})$  zu einer normalverteilten Zufallsvariablen  $Y$  sind, deren Erwartungswert und Varianz unbekannt sind. Geben Sie zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0.99$  ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert  $\mu$  an.