Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
PD Dr. Martin Becker

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2022/23

Aufgabe 2

Es sei Y eine mit Parameter p, $0 < p < 1$, geometrisch verteilte Grundgesamtheit, Y habe also die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_Y(i|p) = p_Y(i) = \begin{cases} (1-p)^i \cdot p & \text{falls } i \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y und $x_1, \ldots, x_n$ die Realisation zu $X_1, \ldots, X_n$. Berechnen Sie (in Abhängigkeit von der Stichprobenrealisation $x_1, \ldots, x_n$) den ML-Schätzer für p.

(b) Bekanntlich ist die Anzahl der Misserfolge einer Bernoulli-Kette vor dem ersten Erfolg geometrisch verteilt, wobei der Parameter die Erfolgswahrscheinlichkeit des Bernoulli-Experiments ist.

Um die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer „6“ bei einem bestimmten Würfel zu schätzen, wurde 10-mal solange gewürfelt, bis zum ersten Mal eine „6“ gefallen war, und die Anzahl der vorangegangenen (Fehl-)Würfe notiert. Berechnen Sie aus der so erhaltenen Stichprobenrealisation

$$(x_1, \ldots, x_{10}) = (3, 2, 14, 0, 7, 3, 6, 8, 0, 3)$$

mit Hilfe von Teil (a) den ML-Schätzer der Wahrscheinlichkeit, mit dem Würfel eine „6“ zu würfeln.

(c) Der Erwartungswert einer mit Parameter p geometrisch verteilten Zufallsvariable ist bekanntlich $\frac{1-p}{p}$. Berechnen Sie nun den zur in Teil (b) angegebenen Stichprobenrealisation gehörigen Schätzwert für p nach der Methode der Momente. In welchem Verhältnis steht der erhaltene Wert zum Ergebnis aus Teil (b)?

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable Y besitze die folgende Dichtefunktion:

$$f_Y(y|\theta) = \left\{ \begin{array}{cc} (\theta+1) \cdot y^\theta & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad -1 < \theta < \infty$$

Eine einfache Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ zu Y ergab die Realisation $(x_1, \ldots, x_n)$.

(a) Schätzen Sie den unbekannten Parameter θ mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{\theta+1}{\theta+2}$ gilt.

(c) Schätzen Sie den unbekannten Parameter θ mit Hilfe der Momentenmethode.

(d) Berechnen Sie die realisierten Schätzer $\widehat{\theta}_{MM}$ nach der Momentenmethode sowie $\widehat{\theta}_{ML}$ nach der ML-Methode zur Stichprobenrealisation

$$0.6427, 0.7193, 0.8305, 0.9684, 0.5864, 0.9649, 0.9812, 0.871\ .$$

Aufgabe 4

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2ay \cdot e^{-a \cdot y^2} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter a soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Man kann zeigen, dass $\mathrm{E}(Y) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4 \cdot a}}$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Aufgabe 5

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $\lambda > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\lambda^2} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\lambda^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter λ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{\lambda}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Man kann zeigen, dass $\mathrm{E}(Y) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \cdot \lambda$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer $\widehat{\lambda}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*