Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
apl. Prof. Dr. Martin Becker

10. Übungsblatt zum Wiederholungskurs
Schließende Statistik SS 2026

Aufgabe 39

Eine amerikanische Fluggesellschaft nimmt an, dass zwischen den jährlichen Kosten für Treibstoff x_i und den übrigen operativen Kosten y_i (jeweils in 100 Mio USD) ein Zusammenhang in Form des einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

besteht.

Die Fluggesellschaft hat über $n = 8$ Jahre die Kosten für Treibstoff x_i sowie die übrigen operativen Kosten y_i erhoben und daraus für die Durchführung einer einfachen linearen Regressionsanalyse bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{8} y_i = 115.24; \quad \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 1736.703; \quad \sum_{i=1}^{8} x_i = 14.916;$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 32.937; \quad \sum_{i=1}^{8} x_i \cdot y_i = 233.495$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß R^2.

(c) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(d) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(e) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**, ob β_1 signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(f) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_2 sich signifikant von Null unterscheidet. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(g) Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1-\alpha = 0.99$ für β_1 an.

(h) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für die restlichen operativen Kosten y_0 in einem Jahr mit Treibstoffkosten von $x_0 = 0.5$ an.

(i) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für den Erwartungswert der restlichen operativen Kosten $\mathrm{E}(y_0)$ in einem Jahr mit Treibstoffkosten von $x_0 = 0.5$ an.

Aufgabe 40

Zur Erklärung der stetigen Wochenrenditen der BMW-Aktie y_i durch die stetigen Wochenrenditen des DAX x_i unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus den stetigen Wochenrenditen der zweiten Jahreshälfte des Jahres 2010 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.058359 -0.020671 -0.001171  0.019764  0.069304

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.009336   0.006724   1.388   0.1777
x           1.164781   0.388177   3.001   0.0062 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.03175 on 24 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2728,       Adjusted R-squared:  0.2425
F-statistic: 9.004 on 1 and 24 DF,  p-value: 0.006196
```

(a) Wie viele Wochenrenditen gingen in die Schätzung ein?

(b) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(c) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(d) Welcher Anteil der Gesamtvarianz der stetigen Wochenrenditen der BMW-Aktie wird durch das lineare Modell erklärt?

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_1 signifikant von Null verschieden ist.

(f) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob β_2 signifikant positiv ist.

(g) Geben Sie ein Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für β_1 an.

(h) Welche Wochenrendite der BMW-Aktie prognostiziert das Modell in einer Woche mit einer (wöchentlichen) DAX-Rendite von 0.01?