

10. Übungsblatt zum Wiederholungskurs
Schließende Statistik SS 2025

Aufgabe 39

Eine amerikanische Fluggesellschaft nimmt an, dass zwischen den jährlichen Kosten für Treibstoff x_i und den übrigen operativen Kosten y_i (jeweils in 100 Mio USD) ein Zusammenhang in Form des einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

besteht.

Die Fluggesellschaft hat über $n = 8$ Jahre die Kosten für Treibstoff x_i sowie die übrigen operativen Kosten y_i erhoben und daraus für die Durchführung einer einfachen linearen Regressionsanalyse bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^8 y_i = 115.24; \quad \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 1736.703; \quad \sum_{i=1}^8 x_i = 14.916;$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 32.937; \quad \sum_{i=1}^8 x_i \cdot y_i = 233.495$$

- (a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.
- (b) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß R^2 .
- (c) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.
- (d) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2_{\beta_1}}$ und $\widehat{\sigma^2_{\beta_2}}$.
- (e) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ (!), ob β_1 signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
- (f) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_2 sich signifikant von Null unterscheidet. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
- (g) Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.99$ für β_1 an.
- (h) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für die restlichen operativen Kosten y_0 in einem Jahr mit Treibstoffkosten von $x_0 = 0.5$ an.
- (i) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für den Erwartungswert der restlichen operativen Kosten $E(y_0)$ in einem Jahr mit Treibstoffkosten von $x_0 = 0.5$ an.

Aufgabe 40

Zur Erklärung der stetigen Wochenrenditen der BMW-Aktie y_i durch die stetigen Wochenrenditen des DAX x_i unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Aus den stetigen Wochenrenditen der zweiten Jahreshälfte des Jahres 2010 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.058359	-0.020671	-0.001171	0.019764	0.069304

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.009336	0.006724	1.388	0.1777
x	1.164781	0.388177	3.001	0.0062 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.03175 on 24 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.2728, Adjusted R-squared: 0.2425

F-statistic: 9.004 on 1 and 24 DF, p-value: 0.006196

- (a) Wie viele Wochenrenditen gingen in die Schätzung ein?
- (b) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.
- (c) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.
- (d) Welcher Anteil der Gesamtvarianz der stetigen Wochenrenditen der BMW-Aktie wird durch das lineare Modell erklärt?
- (e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p -Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_1 signifikant von Null verschieden ist.
- (f) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p -Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob β_2 signifikant positiv ist.
- (g) Geben Sie ein Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für β_1 an.
- (h) Welche Wochenrendite der BMW-Aktie prognostiziert das Modell in einer Woche mit einer (wöchentlichen) DAX-Rendite von 0.01?