

6. Übungsblatt zum Wiederholungskurs
Schließende Statistik SS 2025

Aufgabe 25

Die von einer Maschine M_0 hergestellten Teile werden nach ihrer Fertigstellung einer Kontrolle unterzogen und anhand dieser Kontrolle mit den Qualitätsstufen Q_1 , Q_2 , Q_3 oder Q_4 versehen. Aufgrund langjähriger Erfahrung nimmt man als Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Qualitätsstufen an:

Qualitätsstufe bei M_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Wahrscheinlichkeit	0.18	0.32	0.4	0.1

Die Leitung der Firma steht nun vor der Frage, ob die Maschine M_0 durch eine andere Maschine M_1 ersetzt werden soll. Von M_1 ist lediglich bekannt, dass bei einem Probelauf, bei dem 100 Teile hergestellt wurden und der als einfache Stichprobe angesehen werden kann, die vier Qualitätsstufen mit folgenden Häufigkeiten aufgetreten sind:

Qualitätsstufe bei M_1	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Häufigkeit	24	36	30	10

Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob M_1 bezüglich der Qualitätsstufen dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung wie M_0 besitzt.

Aufgabe 26

Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ getestet werden, ob die von einem Zufallszahlengenerator erzeugten Zufallszahlen (wie gewünscht) Exp(1)-verteilt sind. Dazu wurden $n = 100$ unabhängige Zufallszahlen generiert und die Verteilung auf einer vorgegebenen Intervalleinteilung wie folgt festgestellt:

i	1	2	3	4
K_i	$(-\infty, 0.5]$	$(0.5, 1]$	$(1, 2]$	$(2, \infty)$
n_i	32	31	28	9

Führen Sie den beschriebenen Test durch. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Die Verteilungsfunktion einer $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen X ist gegeben durch:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 27

Bei einer repräsentativen Befragung von 100 Autobesitzern wurden folgende Angaben über die jährlichen Inspektionskosten Y [in €] gemacht:

jährliche Inspektionskosten Y	absolute Häufigkeit n_i
$Y \leq 200$	9
$200 < Y \leq 300$	25
$300 < Y \leq 400$	47
$Y > 400$	19

Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$ die Hypothese, dass die jährlichen Inspektionskosten einer $N(300, 100^2)$ -Verteilung gehorchen.

Aufgabe 28

Für Planungszwecke ist in einem Industrieunternehmen die empirische Verteilung der Maschinenausfälle Y pro Tag ermittelt worden. Es ergaben sich aufgrund einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 200$ folgende Werte:

Maschinenausfälle Y pro Tag	Anzahl der Beobachtungen n_i
0	12
1	43
2	59
3	51
≥ 4	35

Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob die Anzahl der Maschinenausfälle pro Tag poissonverteilt ist. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Maximum-Likelihood-Schätzung mit Hilfe der wie oben klassierten Daten den geschätzten Parameter $\hat{\lambda} = 2.4$ lieferte.

Hinweis: Bekanntlich ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X einer $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen X gegeben durch:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{für } x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$