Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
apl. Prof. Dr. Martin Becker

3. Übungsblatt zum Wiederholungskurs
Schließende Statistik SS 2024

Aufgabe 7

Es sei $X_1, ..., X_n$ eine einfache Stichprobe zur Zufallsvariablen Y mit $\mathrm{E}(Y) = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, und $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{X}^2$ keine erwartungstreue Schätzfunktion für μ^2 ist.

(b) Geben Sie den Bias für die Schätzfunktion in Aufgabenteil (a) an.

Aufgabe 8

Es werde angenommen, dass die Verteilung einer Zufallsvariable Y in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $b > 0$ durch die Dichtefunktion

$$f_Y(y|b) = \begin{cases} b \cdot y^{b-1} & \text{falls } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Eine einfache Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ zu Y ergab die Realisation $(x_1, \ldots, x_n)$. Prüfen Sie nach, ob $\overline{X}$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für b ist.

Aufgabe 9

Die Zufallsvariable Y sei alternativverteilt mit unbekanntem Parameter $p \in [0, 1]$, es gelte also insbesondere $\mathrm{E}(Y) = p$ und $\mathrm{Var}(Y) = p \cdot (1 - p)$. p soll mit Hilfe einer einfachen Stichprobe (X_1, X_2, X_3) vom Umfang 3 zu Y geschätzt werden.

(a) Welche der beiden Schätzfunktionen

(i) $T_1 = \frac{1}{3} \cdot (X_1 + X_2 + X_3)$
(ii) $T_2 = (X_1 + X_2 - X_3)$

sind erwartungstreu für p? (Begründung!)

(b) Berechnen Sie die Varianz von T_1 und T_2.

(c) Welche der beiden Schätzfunktionen würden Sie vorziehen? (Begründung!)

Aufgabe 10

Für $\lambda > 0$ sei $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ (es gilt also insbesondere $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{Var}(Y) = \lambda$), $X_1, \ldots, X_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y.

(a) Zeigen Sie: Die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 - X_i\right)$$

sind erwartungstreu für λ^2.

(b) Welche Eigenschaft müssen die Schätzfunktionen T_n aus Teil (a) außerdem erfüllen, um für λ^2 konsistent im quadratischen Mittel zu sein?
(Die Gültigkeit dieser Eigenschaft ist **nicht** *zu überprüfen!)*

Aufgabe 11

Um eine Aussage über die Lebensdauer Y von Scheibenbremsen zu treffen, wurde in einer Stichprobe von 100 Autos die Lebensdauer der Scheibenbremsen gemessen. Man erhielt dabei den Durchschnittswert

$$\overline{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i = 60000 \text{ [km]}.$$

Es werde angenommen, dass die Lebensdauer Y als eine $N(\mu, 10000^2)$-verteilte Zufallsvariable angesehen werden kann $(x_1, ..., x_{100})$ Realisation einer einfachen Stichprobe $(X_1, ..., X_{100})$ zu Y ist.

(a) Geben Sie ein (symmetrisches) Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lebensdauer der Scheibenbremsen zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ an.

(b) Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit die Abweichung $|\overline{X} - \mu|$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% kleiner als 5000 ist?

Aufgabe 12

Zur Intervallschätzung des Erwartungswerts $\mu := E(Y)$ einer normalverteilten Zufallsvariablen Y mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 2^2$ auf Grundlage der Realisation $x_1, \ldots, x_9$ einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_9$ vom Umfang 9 zu Y soll ein symmetrisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.99$ für μ bestimmt werden.

(a) Wie breit ist ein solches Konfidenzintervall stets?

(b) Geben Sie das realisierte Konfidenzintervall für μ zur folgenden Stichprobenrealisation an:

$$18.21, 20.37, 23.18, 17.74, 19.84, 20.26, 21.42, 19.52, 23.97$$

Aufgabe 13

12 Versuchsflächen wurden mit einer neuen Weizensorte bestellt. Diese Flächen erbrachten folgende Hektarerträge (in dz):

$$35.6, 33.7, 37.8, 31.2, 37.2, 34.1, 35.8, 36.6, 37.1, 34.9, 35.6, 34.0$$

Es werde angenommen, dass die obigen Hektarerträge Realisationen einer einfachen Stichprobe $X_1, X_2, ..., X_{12}$ zur Zufallsvariablen Y sind, welche $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und ein $\sigma^2 > 0$. Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ für μ an.

Aufgabe 14

In einer Befragungsaktion möchte man den Anteil der Haushalte, die einen DVD-Recorder besitzen, ermitteln. Eine Befragung von 400 Haushalten ergab, dass 80 von ihnen über einen DVD-Recorder verfügten.

(a) Geben Sie zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.90$ ein zweiseitiges Konfidenzintervall für unbekannten Anteil p der Haushalte an, die über einen DVD-Recorder verfügen.

(b) Wie breit ist das in Teil (a) berechnete Konfidenzintervall?

(c) Welche Breite hätte das resultierende Konfidenzintervall, wenn 200 der befragten Haushalte angegeben hätten, über einen DVD-Recorder zu verfügen?

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Ausschnitt aus der Tabelle für gängige Quantile der t-Verteilungen.

$n \backslash p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
399	1.038	1.284	1.649	1.966	2.336	2.588	3.315