

10. Übungsblatt zum Wiederholungskurs  
Schließende Statistik SS 2023

Aufgabe 39

Eine amerikanische Fluggesellschaft nimmt an, dass zwischen den jährlichen Kosten für Treibstoff  $x_i$  und den übrigen operativen Kosten  $y_i$  (jeweils in 100 Mio USD) ein Zusammenhang in Form des einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

besteht.

Die Fluggesellschaft hat über  $n = 8$  Jahre die Kosten für Treibstoff  $x_i$  sowie die übrigen operativen Kosten  $y_i$  erhoben und daraus für die Durchführung einer einfachen linearen Regressionsanalyse bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^8 y_i = 115.24; \quad \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 1736.703; \quad \sum_{i=1}^8 x_i = 14.916;$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 32.937; \quad \sum_{i=1}^8 x_i \cdot y_i = 233.495$$

- Schätzen Sie  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.
- Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß  $R^2$ .
- Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für  $\sigma^2$  den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- Berechnen Sie  $\widehat{\sigma^2_{\hat{\beta}_1}}$  und  $\widehat{\sigma^2_{\hat{\beta}_2}}$ .
- Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.01$  (!), ob  $\beta_1$  signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
- Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob  $\beta_2$  sich signifikant von Null unterscheidet. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.
- Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.99$  für  $\beta_1$  an.
- Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.95$  für die restlichen operativen Kosten  $y_0$  in einem Jahr mit Treibstoffkosten von  $x_0 = 0.5$  an.
- Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.95$  für den Erwartungswert der restlichen operativen Kosten  $E(y_0)$  in einem Jahr mit Treibstoffkosten von  $x_0 = 0.5$  an.

#### Aufgabe 40

Zur Erklärung der stetigen Wochenrenditen der BMW-Aktie  $y_i$  durch die stetigen Wochenrenditen des DAX  $x_i$  unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \quad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Aus den stetigen Wochenrenditen der zweiten Jahreshälfte des Jahres 2010 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.058359	-0.020671	-0.001171	0.019764	0.069304

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.009336	0.006724	1.388	0.1777
x	1.164781	0.388177	3.001	0.0062 **

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.03175 on 24 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.2728, Adjusted R-squared: 0.2425

F-statistic: 9.004 on 1 and 24 DF, p-value: 0.006196

- Wie viele Wochenrenditen gingen in die Schätzung ein?
- Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für  $\beta_1$  und  $\beta_2$  an.
- Geben Sie den realisierten Schätzwert für  $\sigma^2$  an.
- Welcher Anteil der Gesamtvarianz der stetigen Wochenrenditen der BMW-Aktie wird durch das lineare Modell erklärt?
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ , ob  $\beta_1$  signifikant von Null verschieden ist.
- Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen  $p$ -Werts zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.01$ , ob  $\beta_2$  signifikant positiv ist.
- Geben Sie ein Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.95$  für  $\beta_1$  an.
- Welche Wochenrendite der BMW-Aktie prognostiziert das Modell in einer Woche mit einer (wöchentlichen) DAX-Rendite von 0.01?