

9. Übungsblatt zum Wiederholungskurs  
 Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung WS 2023/24

Aufgabe 38

Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Es seien  $X$  die Anzahl von Würfeln mit ungerader Augenzahl und  $Y$  die Anzahl von Würfeln mit Augenzahlen von höchstens „3“.

- (a) Geben Sie die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors  $(X, Y)$  an.
- (b) Geben Sie die Randverteilungen von  $X$  und  $Y$  an.
- (c) Bestimmen Sie  $P(\{X \leq 1, Y \leq 1\})$ .
- (d) Prüfen Sie nach, ob  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 39

Für die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle mit Randwahrscheinlichkeiten unvollständig wie folgt gegeben:

$X \setminus Y$	2	3	4	$p_{i \cdot}$
1	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$	
2		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{4}$			$\frac{3}{8}$
$p_{\cdot j}$		$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	

- (a) Vervollständigen Sie die Tabelle.
- (b) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!
- (c) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
  - (i)  $P\{1 \leq X \leq 2, 2 \leq Y \leq 3\}$  ,
  - (ii)  $P\{X \leq 2\}$  ,
  - (iii)  $P\{X > 2, Y < 3\}$  .
- (d) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktionen von  $X|Y = 3$  und  $Y|X = 1$  an.

#### Aufgabe 40

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor  $(X, Y)$ :

$X \setminus Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
0	0.1	0.2	0.2	
1	0.2	0.1	0.2	
$p_{\cdot j}$				

- Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.
- Berechnen Sie  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $\text{Var}(X)$ ,  $\text{Var}(Y)$ ,  $\text{Cov}(X, Y)$  sowie  $\text{Korr}(X, Y)$ .
- Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?
- Berechnen Sie  $E(2X + 3Y)$  sowie  $\text{Var}(2X + 3Y)$ .

#### Aufgabe 41

Der zweidimensionale Zufallsvektor  $(X, Y)$  besitze die folgende gemeinsame Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie eine Randdichte  $f_X$  von  $X$  sowie eine Randdichte  $f_Y$  von  $Y$ .
- Vergleichen Sie das Produkt der beiden Randdichten mit der angegebenen gemeinsamen Dichtefunktion. Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?
- Geben Sie für  $0 \leq y \leq 2$  bedingte Dichtefunktionen  $f_{X|Y=y}$  von  $X$  gegeben  $Y = y$  an.
- Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von  $X$  und  $Y$ .
- Berechnen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten von  $X$  und  $Y$ .

#### Aufgabe 42

Gegeben sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor  $(X, Y)$  mit  $X \sim N(10, \sqrt{3}^2)$  und  $Y \sim \text{Unif}(2, 8)$ , das heißt, die Randverteilungen von  $X$  bzw.  $Y$  seien eine Normalverteilung mit Parametern  $\mu_X = 10$  und  $\sigma_X^2 = \sqrt{3}^2 = 3$  bzw. eine stetige Gleichverteilung auf dem Intervall  $[2, 8]$ .

- In welchem Bereich muss die Kovarianz  $\text{Cov}(X, Y)$  liegen?
- Es sei nun bekannt, dass  $\text{Korr}(X, Y) = -0.5$  gilt. Berechnen Sie:
  - $\text{Cov}(2X, -3Y)$ ,
  - $E(2X - 3Y + 4)$ ,
  - $\text{Var}(2X - 3Y + 4)$ .
- Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $3X^2 - 3Y^2$ .