Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
PD Dr. Martin Becker

9. Übungsblatt zum Wiederholungskurs
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung WS 2019/20

Aufgabe 38

Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Es seien X die Anzahl von Würfen mit ungerader Augenzahl und Y die Anzahl von Würfen mit Augenzahlen von höchstens „3“.

(a) Geben Sie die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) an.

(b) Geben Sie die Randverteilungen von X und Y an.

(c) Bestimmen Sie $P(\{X \leq 1, Y \leq 1\})$.

(d) Prüfen Sie nach, ob X und Y stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 39

Für die Zufallsvariablen X und Y ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle mit Randwahrscheinlichkeiten unvollständig wie folgt gegeben:

$X \setminus Y$	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{16}$	
2		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{4}$			$\frac{3}{8}$
$p_{\cdot j}$		$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

(b) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P\{1 \leq X \leq 2, 2 \leq Y \leq 3\}$,

(ii) $P\{X \leq 2\}$,

(iii) $P\{X > 2, Y < 3\}$.

(d) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktionen von $X|Y = 3$ und $Y|X = 1$ an.

Aufgabe 40

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y):

$X \setminus Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
0	0.1	0.2	0.2	
1	0.2	0.1	0.2	
$p_{\cdot j}$				

(a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ sowie $\mathrm{Korr}(X, Y)$.

(c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(d) Berechnen Sie $\mathrm{E}(2X + 3Y)$ sowie $\mathrm{Var}(2X + 3Y)$.

Aufgabe 41

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) besitze die folgende gemeinsame Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie eine Randdichte f_X von X sowie eine Randdichte f_Y von Y.

(b) Vergleichen Sie das Produkt der beiden Randdichten mit der angegebenen gemeinsamen Dichtefunktion. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(c) Geben Sie für $0 \leq y \leq 2$ bedingte Dichtefunktionen $f_{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$ an.

(d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von X und Y.

(e) Berechnen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

Aufgabe 42

Gegeben sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) mit $X \sim N(10, \sqrt{3}^2)$ und $Y \sim \mathrm{Unif}(2, 8)$, das heißt, die Randverteilungen von X bzw. Y seien eine Normalverteilung mit Parametern $\mu_X = 10$ und $\sigma_X^2 = \sqrt{3}^2 = 3$ bzw. eine stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $[2, 8]$.

(a) In welchem Bereich muss die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ liegen?

(b) Es sei nun bekannt, dass $\mathrm{Korr}(X, Y) = -0.5$ gilt. Berechnen Sie:

  (i) $\mathrm{Cov}(2X, -3Y)$,

  (ii) $\mathrm{E}(2X - 3Y + 4)$,

  (iii) $\mathrm{Var}(2X - 3Y + 4)$.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $3X^2 - 3Y^2$.