

12. Übungsblatt zur Vorlesung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung SS 2025

Aufgabe 55

In der folgenden Tabelle ist die (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung des zweidimensionalen diskreten Zufallsvektors (X, Y) gegeben:

Y X	1	2	3
1	0.02	0.13	0.15
2	0.16	0.20	0.14
3	0.12	0.04	0.04

- (a) Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung um die beiden Randverteilungen.
- (b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
 - (i) $P\{1 \leq X \leq 2, 2 \leq Y \leq 3\}$,
 - (ii) $P\{X \leq 2\}$,
 - (iii) $P\{X > 2, Y < 3\}$.
- (c) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X unter der Bedingung $Y = y_j$ für alle $y_j \in T(Y)$ über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.
- (d) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit den Resultaten aus Teil (c)!

Aufgabe 56

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) habe die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Y X	3	4	5
1	1/6	0	1/6
2	1/12	1/3	0
3	0	1/6	1/12

- (a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$ sowie die Varianzen $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$.
- (b) Berechnen Sie die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\text{Korr}(X, Y)$.
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $4X - 2Y + 3$.

Aufgabe 57

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) besitze die folgende gemeinsame Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} y - x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie eine Randdichte f_X von X sowie eine Randdichte f_Y von Y .
- (b) Vergleichen Sie das Produkt der beiden Randdichten mit der angegebenen gemeinsamen Dichtefunktion. Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- (c) Geben Sie für $0 \leq y \leq 1$ bedingte Dichtefunktionen $f_{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$ an.
- (d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von X und Y .
- (e) Berechnen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten von X und Y .

Aufgabe 58

Gegeben sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) mit $X \sim N(4, 2^2)$ und $Y \sim \text{Exp}(0.5)$, das heißt, die Randverteilungen von X bzw. Y seien eine Normalverteilung mit Parametern $\mu_X = 4$ und $\sigma_X^2 = 2^2$ bzw. eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_Y = 0.5$.

- (a) In welchem Bereich muss die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ liegen?
- (b) Es sei nun bekannt, dass $\text{Korr}(X, Y) = 0.5$ gilt. Berechnen Sie:
 - (i) $\text{Cov}(4X, -2Y)$,
 - (ii) $E(4X - 2Y + 2)$,
 - (iii) $\text{Var}(4X - 2Y + 2)$.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $4X^2 - 4Y^2$.