

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung SS 2023

Aufgabe 36

Ein (fairer) Würfel wird zweimal hintereinander geworfen, die möglichen Ausgänge des Experiments seien in der Ergebnismenge

$$\Omega = \{(m_1, m_2) \mid m_1, m_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$$

zusammengefasst.

Betrachten Sie im Folgenden die Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis des zweifachen Würfelswurfs den Betrag der Differenz der beiden gewürfelten Zahlen zuordnet, also die Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; X((m_1, m_2)) := |m_1 - m_2| .$$

- Stellen Sie die Abbildung X in Tabellenform (in Abhängigkeit von m_1 und m_2) dar.
- Geben Sie den Träger $T(X)$ von X sowie die zugehörigen Punktwahrscheinlichkeiten an.
- Stellen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X auf.
- Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X und die Verteilungsfunktion F_X grafisch dar.
- Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\{X \leq 4\} \quad P\{X > 2\} \quad P\{1 \leq X \leq 4\} \quad P\{1 < X < 5\}$$

- Nach einem Kochabend zu dritt einigen sich Annabel, Beatrice und Christoph darauf, den Zufall bestimmen zu lassen, wer sich um das Einräumen der Spülmaschine kümmern muss. Christoph schlägt vor, zweimal zu Würfeln und den Betrag der Differenz der beiden gewürfelten Zahlen zu bestimmen. Ist das Ergebnis 0 oder 1, so soll Annabel sich um das Geschirr kümmern, bei 2 oder 3 Beatrice, schließlich bei 4 oder 5 er selbst. Ist Christophs Vorschlag fair (in dem Sinn, dass sich jeder mit gleicher Wahrscheinlichkeit um das Geschirr kümmern muss)? Falls nicht, können Sie einen ähnlichen Vorschlag zur Auslosung machen, der jedoch fair im obigen Sinn ist?

Aufgabe 37

Die diskrete Zufallsvariable X besitze die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1/8 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 3/4 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

- Geben Sie die Sprungstellen mit den entsprechenden Punktwahrscheinlichkeiten an.
- Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\{0 < X \leq 2\} \quad P\{0 \leq X < 2\} \quad P\{X \geq 1\}$$

Aufgabe 38

Gegeben sei die Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

einer eindimensionalen stetigen Zufallsvariablen X .

- (a) Bestimmen und zeichnen Sie eine Dichtefunktion f_X von X .
(b) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\{X \leq 2\} \quad P\{X \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]\} \quad P\{X \geq 4\} \quad P\{X = 2\}$$

Aufgabe 39

Gegeben sei für $c \in \mathbb{R}$ die Familie von Funktionen

$$f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_c(x) = \begin{cases} c \cdot (x-3)^2 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

- (a) Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist f_c eine Dichtefunktion?
(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X , die durch die Dichtefunktion aus Teil (a) gegeben ist.
(c) Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F_X aus Teil (b). Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\{X \leq \frac{9}{4}\} \quad P\{\frac{5}{2} < X \leq \frac{7}{2}\} \quad P\{X \geq 3\}$$