Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren I

- Im Folgenden: *Simultane* Betrachtung *mehrerer* (endlich vieler) Zufallsvariablen über *demselben* Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der betrachteten Zufallsvariablen, so fasst man die n Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ in einem n-dimensionalen Vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ zusammen.
- Damit ist $\mathbb{R}^n$ der Wertebereich der Abbildung $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, als σ-Algebra über $\mathbb{R}^n$ wählt man die n-dimensionale Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^n$, in der alle karthesischen Produkte von n Elementen aus $\mathcal{B}$ enthalten sind.
- Insbesondere enthält $\mathcal{B}^n$ alle endlichen und abzählbar unendlichen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sowie alle karthesischen Produkte von n Intervallen aus $\mathbb{R}$.
- Damit lassen sich die meisten bekannten Konzepte eindimensionaler Zufallsvariablen leicht übertragen.
- Ähnlich zur Situation bei mehrdimensionalen Merkmalen in der deskriptiven Statistik werden viele Darstellungen im Fall $n > 2$ allerdings schwierig.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren II

Definition 10.1 (Zufallsvektor, Mehrdimensionale Zufallsvariable)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n : \mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))'$$

*eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}^n-$messbare Abbildung. Dann heißen $\mathbf{X}$ n-**dimensionale Zufallsvariable** bzw. n-**dimensionaler Zufallsvektor** über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und die gemäß Definition 8.3 gebildete Bildwahrscheinlichkeit*

$$P_{\mathbf{X}} : \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{B} \mapsto P(\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}))$$

(gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung *oder kürzer* **(gemeinsame) Verteilung** *von $\mathbf{X}$. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbf{X}})$ ist damit ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsraum. Liegt nach Durchführung des Zufallsexperiments $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ das Ergebnis $\omega \in \Omega$ vor, so heißt der zugehörige Wert $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega)$ die* **Realisierung** *oder* **Realisation** *von $\mathbf{X}$.*

Mehrdimensionale Zufallsvariablen/Zufallsvektoren III

- Wie im eindimensionalen Fall sind Kurzschreibweisen (zum Beispiel) der Form

  $$P\{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\} := P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n])$$

  für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ geläufig.
- Auch hier legen die Wahrscheinlichkeiten solcher Ereignisse die Verteilung des n-dimensionalen Zufallsvektors bereits eindeutig fest, und man definiert analog zum eindimensionalen Fall die gemeinsame Verteilungsfunktion

  $$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) := P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]) \; .$$

- Gemeinsame Verteilungsfunktionen mehrdimensionaler Zufallsvariablen sind allerdings für den praktischen Einsatz im Vergleich zur eindimensionalen Variante relativ unbedeutend und werden daher hier nicht weiter besprochen.

Diskrete Zufallsvektoren I

- Ist analog zum eindimensionalen Fall

$$\mathbf{X}(\Omega) := \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega) \text{ für (mindestens) ein } \omega \in \Omega\}$$

  endlich oder abzählbar unendlich bzw. existiert (wiederum etwas allgemeiner) eine endliche oder abzählbar unendliche Menge $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = 1$, so nennt man auch solche Zufallsvektoren „diskret".
- Mit Hilfe einer (mehrdimensionalen) Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{\mathbf{X}}$ mit $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{x}\})$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ können Wahrscheinlichkeiten $P\{\mathbf{X} \in \mathbf{A}\}$ für Ereignisse $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^n$ wiederum durch Aufsummieren der Punktwahrscheinlichkeiten aller Trägerpunkte $\mathbf{x}_i$ mit $\mathbf{x}_i \in \mathbf{A}$ berechnet werden, also durch:

$$P\{\mathbf{X} \in \mathbf{A}\} = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{A} \cap T(\mathbf{X})} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \qquad \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathcal{B}^n$$

Diskrete Zufallsvektoren II

Definition 10.2 (Diskreter Zufallsvektor)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X}$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich oder abzählbar unendlich mit $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = 1$. Dann nennt man

- $\mathbf{X}$ *einen* **diskreten** *Zufallsvektor,*
- $p_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]; p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{x}\})$ *die* **(gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsfunktion** *von* $\mathbf{X}$,
- $T(\mathbf{X}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\}$ *den* **Träger** *von* $\mathbf{X}$ *sowie alle Elemente* $\mathbf{x} \in T(\mathbf{X})$ **Trägerpunkte** *von* $\mathbf{X}$ *und deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktionswerte* $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ **Punktwahrscheinlichkeiten**.

Notationen im Spezialfall $n = 2$

- Im Folgenden wird (auch für weitere Anwendungen) regelmäßig der Spezialfall $n = 2$ betrachtet.
- Zur Vereinfachung der Darstellung (insbesondere zur Vermeidung doppelter Indizes) sei der betrachtete Zufallsvektor $\mathbf{X}$ dann mit $\mathbf{X} = (X, Y)'$ oder $\mathbf{X} = (X, Y)$ statt $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ bezeichnet.
- Diskrete 2-dimensionale Zufallsvektoren $\mathbf{X} = (X, Y)$ werden in der Regel durch die Angabe der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \; (x, y) \mapsto p_{X,Y}(x, y)$$

  spezifiziert.
- Ist $\mathbf{X} = (X, Y)$ dabei ein zweidimensionaler diskreter Zufallsvektor mit „wenigen" Trägerpunkten, stellt man die gemeinsame Verteilung — analog zu den Kontingenztabellen der deskriptiven Statistik — gerne in Tabellenform dar.

Beispiel: (Gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsfunktion

bei zweidimensionaler diskreter Zufallsvariable

- Ist $\mathbf{X} = (X, Y)$ zweidimensionale diskrete Zufallsvariable mit endlichem Träger, $A := T(X) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ der Träger von X und $B := T(Y) = \{y_1, \ldots, y_l\}$ der Träger von Y, so werden die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{\mathbf{X}}$ auch mit

$$p_{ij} := p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \qquad \text{für } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, l\}$$

  bezeichnet und wie folgt tabellarisch dargestellt:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_l
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1l}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\cdots$	p_{kl}

Randverteilungen I

- Wie in der deskriptiven Statistik lassen sich die Verteilungen der einzelnen Zufallsvariablen eines n-dimensionalen Zufallsvektors auch aus der gemeinsamen Verteilung gewinnen.
- Analog zu den „Randhäufigkeiten" erhält man so die **Randverteilungen** der einzelnen Komponenten des Zufallsvektors.
- Ist $\mathbf{X}$ diskreter n-dimensionaler Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{\mathbf{X}}$, so erhält man für $j \in \{1, \dots, n\}$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_{X_j} zur j-ten Komponente X_j durch:

$$p_{X_j}(x) = \sum_{\substack{\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \\ x_{i,j} = x}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)$$

Fortsetzung Beispiel (zweidimensional, diskret)

Ergänzung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitstabelle um Randverteilungen

- Ist $A = T(X) = \{x_1, \dots, x_k\}$ der Träger von X und $B = T(Y) = \{y_1, \dots, y_l\}$ der Träger von Y, so erhält man für $i \in \{1, \dots, k\}$ als Zeilensummen

$$p_{i\cdot} := p_X(x_i) = \sum_{j=1}^{l} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}$$

sowie für $j \in \{1, \dots, l\}$ als Spaltensummen

$$p_{\cdot j} := p_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{k} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}$$

und damit insgesamt die folgende ergänzte Tabelle:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_l	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1l}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2l}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\cdots$	p_{kl}	$p_{k\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot l}$	1

(Stochastische) Unabhängigkeit von Zufallsvariablen I

- Die Komponenten $X_1, \dots, X_n$ eines n-dimensionalen Zufallsvektors werden genau dann **stochastisch unabhängig** genannt, wenn alle Ereignisse der Form

$$\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\} \qquad \text{für } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$$

stochastisch unabhängig sind:

Definition 10.3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann heißen die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ **(stochastisch) unabhängig***, wenn für alle $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ gilt:*

$$P\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\} = P\{X_1 \in B_1\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n \in B_n\}$$

(Stochastische) Unabhängigkeit von Zufallsvariablen II

- Man kann weiter zeigen, dass n diskrete Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn für den (in diesem Fall ebenfalls diskreten) Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ bzw. die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktionen für alle $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i) = p_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot p_{X_n}(x_n)$$

- Insbesondere sind X und Y im Fall $n = 2$ mit $\mathbf{X} = (X, Y)$ bei endlichen Trägern $A = T(X) = \{x_1, \dots, x_k\}$ von X und $B = T(Y) = \{y_1, \dots, y_l\}$ von Y unabhängig, falls $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und $j \in \{1, \dots, l\}$.

Bedingte Verteilungen 2-dim. Zufallsvektoren I

Definition 10.4 (Bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung (diskret))

Seien $\mathbf{X} = (X, Y)$ *ein diskreter zweidimensionaler Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsfunktion* $p_{(X,Y)}$, p_Y *die Wahrscheinlichkeitsfunktion zur Randverteilung von* Y, $y \in T(Y)$. *Dann heißt die durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$p_{X|Y=y} : \mathbb{R} \to [0,1]; p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)}$$

definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung **bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unter der Bedingung $Y = y$**.
Analog nennt man für $x \in T(X)$ *die durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$p_{Y|X=x} : \mathbb{R} \to [0,1]; p_{Y|X=x}(y) = \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_X(x)}$$

definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung **bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y unter der Bedingung $X = x$**.

Bemerkungen I

- Mit den üblichen Bezeichnungen und Abkürzungen für zweidimensionale Zufallsvektoren mit endlichem Träger erhält man mit Definition 10.4 analog zu den bedingten Häufigkeiten bei zweidimensionalen Merkmalen

$$p_{X|Y=y_j}(x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad \text{und} \qquad p_{Y|X=x_i}(y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, \ldots, l\}$.
- Ebenfalls analog zur deskriptiven Statistik sind zwei Zufallsvariablen also genau dann stochastisch unabhängig, wenn die bedingten Verteilungen jeweils mit den zugehörigen Randverteilungen übereinstimmen, also wenn im diskreten Fall $p_{X|Y=y}(x) = p_X(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in T(Y)$ sowie $p_{Y|X=x}(y) = p_Y(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $x \in T(X)$ gilt.

Bemerkungen II

- Durch bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_{X|Y=y}$ bzw. $p_{Y|X=x}$ definierte bedingte Verteilungen können *im weiteren Sinne* als Verteilungen eindimensionaler Zufallsvariablen $X|Y = y$ bzw. $Y|X = x$ aufgefasst werden.
- Damit lassen sich viele für eindimensionale Zufallsvariablen bekannte Methoden/Konzepte in natürlicher Weise übertragen, insbesondere auf
  - bedingte Verteilungsfunktionen $F_{X|Y=y}$ bzw. $F_{Y|X=x}$,
  - bedingte Wahrscheinlichkeitsmaße $P_{X|Y=y}$ bzw. $P_{Y|X=x}$,
  - bedingte Träger $T(X|Y = y)$ bzw. $T(Y|X = x)$,
  - bedingte Erwartungswerte $\mathrm{E}(X|Y = y)$ bzw. $\mathrm{E}(Y|X = x)$,
  - bedingte Varianzen $\mathrm{Var}(X|Y = y)$ bzw. $\mathrm{Var}(Y|X = x)$,
- Den bedingten Erwartungswert $\mathrm{E}(Y|X = x)$ erhält man im diskreten Fall zum Beispiel durch: $\mathrm{E}(Y|X = x) = \sum_{y_i} y_i \cdot p_{Y|X=x}(y_i)$.
- Gültig bleibt auch der VZS: $\mathrm{Var}(X|Y = y) = \mathrm{E}(X^2|Y = y) - [\mathrm{E}(X|Y = y)]^2$

Erwartungswert von $G(X, Y)$

Definition 10.5

Es seien (X, Y) *ein zweidimensionaler diskreter Zufallsvektor und* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *eine* $\mathcal{B}^2 - \mathcal{B}-$*messbare Abbildung. Sind* (x_i, y_j) *die Trägerpunkte sowie* $p_{(X,Y)}$ *die Wahrscheinlichkeitsfunktion von* (X, Y) *und gilt*

$$\sum_{x_i} \sum_{y_j} |G(x_i, y_j)| \cdot p_{(X,Y)}(x_i, y_j) < \infty ,$$

dann existiert der Erwartungswert $\mathrm{E}(G(X, Y))$ *und es gilt*

$$\mathrm{E}(G(X, Y)) = \sum_{x_i} \sum_{y_j} G(x_i, y_j) \cdot p_{(X,Y)}(x_i, y_j).$$

- *Beispiel 1:* $G(X, Y) = a \cdot X + b \cdot Y + c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$
  Wegen der Linearität von Summenbildung und Integration gilt stets:

$$\mathrm{E}(a \cdot X + b \cdot Y + c) = a \cdot \mathrm{E}(X) + b \cdot \mathrm{E}(Y) + c$$

- *Beispiel 2:* $G(X, Y) = X \cdot Y$
  Hier gilt im allgemeinen **nicht** $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$!
  Sind X und Y allerdings **stochastisch unabhängig**, so gilt im diskreten Fall wegen $p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ insgesamt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X \cdot Y) &= \sum_{x_i} \sum_{y_j} x_i \cdot y_j \cdot p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j) \\ &= \sum_{x_i} x_i \cdot p_X(x_i) \cdot \sum_{y_j} y_j \cdot p_Y(y_j) , \end{aligned}$$

womit man **in diesem Fall** speziell $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$ erhält.

Abhängigkeitsmaße

- Analog zur deskriptiven Statistik ist man an Maßzahlen für die Abhängigkeit von zwei Zufallsvariablen X und Y über demselben Wahrscheinlichkeitsraum interessiert.
- Bei stochastischer Unabhängigkeit von X und Y sollten diese Maßzahlen naheliegenderweise den Wert 0 annehmen.
- Wie in deskriptiver Statistik: Maß für **lineare** Abhängigkeit von X und Y vordergründig:

Definition 10.6 (Kovarianz)

Es sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor. Den Erwartungswert

$$\sigma_{XY} := \mathrm{Cov}(X, Y) := \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y - \mathrm{E}(Y))\right]$$

nennt man (im Falle der Existenz) **Kovarianz** *zwischen X und Y.*

- Eine dem Varianzzerlegungssatz ähnliche Rechenvorschrift zeigt man auch leicht für die Berechnung der Kovarianz:

Rechenregeln für Kovarianzen

Satz 10.1 (Kovarianzzerlegungssatz)

Ist (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor, so gilt (im Fall der Existenz der beteiligten Erwartungswerte)

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$$

Sind X, Y und Z Zufallsvariablen (über demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) und $a, b \in \mathbb{R}$, so gelten außerdem die folgenden Rechenregeln:

1. $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
2. $\mathrm{Cov}(X + a, Y + b) = \mathrm{Cov}(X, Y)$
   (Translationsinvarianz)
3. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
   (Symmetrie)
4. $\mathrm{Cov}(X + Z, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Z, Y)$
5. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
6. X, Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

- Die erreichbaren Werte der Größe $\mathrm{Cov}(X, Y)$ hängen nicht nur von der Stärke der linearen Abhängigkeit ab, sondern (wie insbesondere aus Rechenregel 1 von Folie 269 ersichtlich) auch von der Streuung von X bzw. Y.
- Wie in deskriptiver Statistik: Alternatives Abhängigkeitsmaß mit normiertem „Wertebereich", welches invariant gegenüber Skalierung von X bzw. Y ist.
- Hierzu Standardisierung der Kovarianz über Division durch Standardabweichungen von X und Y (falls möglich!):

Definition 10.7

Es sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 > 0$ und $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2 > 0$. Man nennt

$$\rho_{XY} := \mathrm{Korr}(X, Y) := \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{+\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}}$$

den **Korrelationskoeffizienten** *(nach Bravais-Pearson) zwischen X und Y.*

Rechenregeln für Korrelationskoeffizienten

Sind X und Y Zufallsvariablen (über demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) mit $\text{Var}(X) > 0, \text{Var}(Y) > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt:

1. $\text{Korr}(aX, bY) = \begin{cases} \text{Korr}(X,Y) & \text{falls } a \cdot b > 0 \\ -\text{Korr}(X,Y) & \text{falls } a \cdot b < 0 \end{cases}$
2. $\text{Korr}(X + a, Y + b) = \text{Korr}(X, Y)$ *(Translationsinvarianz)*
3. $\text{Korr}(X, Y) = \text{Korr}(Y, X)$ *(Symmetrie)*
4. $-1 \leq \text{Korr}(X, Y) \leq 1$
5. $\text{Korr}(X, X) = 1$
6. $\left.\begin{array}{l} \text{Korr}(X,Y) = 1 \\ \text{Korr}(X,Y) = -1 \end{array}\right\}$ genau dann, wenn $Y = aX + b$ mit $\begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$
7. X, Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow \text{Korr}(X, Y) = 0$

Zufallsvariablen X, Y mit $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (!) heißen **unkorreliert**.

Zusammenhang Unkorreliertheit und Unabhängigkeit

- Offensichtlich gilt stets (falls die Kovarianz existiert):

$$X, Y \text{ stochastisch unabhängig} \quad \Rightarrow \quad X, Y \text{ unkorreliert}$$

- Die Umkehrung ist allerdings *im allgemeinen* falsch, es gilt **außer in speziellen Ausnahmefällen**:

$$X, Y \text{ unkorreliert} \quad \not\Rightarrow \quad X, Y \text{ stochastisch unabhängig}$$

Varianzen von Summen zweier Zufallsvariablen

- Durch Verknüpfung verschiedener Rechenregeln aus Folie 269 lässt sich leicht zeigen, dass stets

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + 2\,\text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y)$$

bzw. für $a, b, c \in \mathbb{R}$ allgemeiner stets

$$\text{Var}(aX + bY + c) = a^2\,\text{Var}(X) + 2ab\,\text{Cov}(X, Y) + b^2\,\text{Var}(Y)$$

gilt.

- **Nur für unkorrelierte** (also insbesondere auch für stochastisch unabhängige) Zufallsvariablen X und Y gilt offensichtlich spezieller

$$\text{Var}(aX + bY + c) = a^2\,\text{Var}(X) + b^2\,\text{Var}(Y) \ .$$

Dies kann für mehr als zwei Zufallsvariablen weiter verallgemeinert werden.