Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume I

- Einfachster Fall für $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (wie in Würfel-Beispiel):
  - Ω endlich,
  - Eintritt aller Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich.
- Wahrscheinlichkeitsräume mit dieser Eigenschaft heißen **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume**.
- Als σ-Algebra $\mathcal{F}$ kann stets $\mathcal{P}(\Omega)$ angenommen werden. Insbesondere ist also jede beliebige Teilmenge von Ω ein Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsräume II

- Das **Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß** P ergibt sich dann als:

$$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}; P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist also der Quotient

$$\frac{\text{Anzahl der im Ereignis } A \text{ enthaltenen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

  bzw.

$$\frac{\text{Anzahl der (für Ereignis } A\text{) günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der (insgesamt) möglichen Fälle}} .$$

- Einzige Schwierigkeit: **Zählen!**

Kombinatorik

- Disziplin, die sich mit „Zählen“ beschäftigt: **Kombinatorik**
- Verwendung allgemeiner Prinzipien und Modelle als Hilfestellung zum Zählen in konkreten Anwendungen.

Satz 6.1 (Additionsprinzip, Multiplikationsprinzip)

Sei $r \in \mathbb{N}$, seien $M_1, M_2, \ldots, M_r$ (jeweils) endliche Mengen.

- *Ist $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, dann gilt das* **Additionsprinzip**

$$|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_r| = |M_1| + |M_2| + \cdots + |M_r| \,.$$

- *Mit $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r := \{(m_1, \ldots, m_r) \mid m_1 \in M_1, \ldots, m_r \in M_r\}$ gilt das* **Multiplikationsprinzip**

$$|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_r|$$

und im Fall $M = M_1 = M_2 = \cdots = M_r$ mit $M^r := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{r-\text{mal}}$ spezieller

$$|M^r| = |M|^r.$$

Definition 6.1 (Fakultät, Binomialkoeffizient)

1. *Mit* $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ *sei die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null bezeichnet.*
2. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *definiert man die Zahl* $n! \in \mathbb{N}$ *(gelesen „n-**Fakultät**“) rekursiv durch*
   - $0! := 1$ *und*
   - $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.
3. *Für* $n, r \in \mathbb{N}_0$ *mit* $0 \leq r \leq n$ *definiert man die Zahl* $(n)_r$ *(gelesen „n tief r“) durch*
   $$(n)_r := \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \; .$$
4. *Für* $n, r \in \mathbb{N}_0$ *und* $0 \leq r \leq n$ *definiert man den* **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{r}$ *(gelesen „n über r“) durch*
   $$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \; .$$

Modelle zum Zählen I

- Gebräuchliches (Hilfs-)Modell zum Zählen: **Urnenmodell**:

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, r mal aus einer Urne mit n unterscheidbaren (z.B. von 1 bis n nummerierten) Kugeln zu ziehen?

- Varianten:
  - Ist die Reihenfolge der Ziehungen relevant?
  - Wird die Kugel nach jeder Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt?

Modelle zum Zählen II

- *Alternatives Modell:*

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, r Murmeln in n unterscheidbare (z. B. von 1 bis n nummerierte) Schubladen zu verteilen.

  Achtung: Auch als weiteres Urnenmodell (Verteilen von r Kugeln auf n Urnen) geläufig!
- Varianten:
  - Sind (auch) die Murmeln unterscheidbar?
  - Dürfen mehrere Murmeln pro Schublade (Mehrfachbelegungen) vorhanden sein?
- Beide Modelle entsprechen sich (einschließlich ihrer Varianten)!
- Im Folgenden (zur Vereinfachung der Darstellung):
  Identifizieren von endlichen Mengen der Mächtigkeit n mit der Menge $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ der ersten n natürlichen Zahlen.

Variante I

„geordnete Probe (Variation) mit Wiederholung"

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.
  Für jede der r Ziehungen n Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$ {}^{w}_{n}V_{r} := \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ Faktoren}} = n^r $$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$ \{(m_1, \ldots, m_r) \mid m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_n\} = \mathbb{N}_n^r $$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**

Variante II

„geordnete Probe (Variation) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **mit** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Für erste Ziehung n Möglichkeiten, für zweite $n-1$, ..., für r-te Ziehung $n-r+1$ Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$_nV_r := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$\{(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \,|\, m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq r\}$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Spezialfall:** $n = r$
  - $\leadsto$ $n!$ verschiedene Möglichkeiten
  - entspricht (Anzahl der) möglichen Anordnungen (**Permutationen**) von n unterscheidbaren Kugeln bzw. n unterscheidbaren Murmeln

Variante III

„ungeordnete Probe (Kombination) ohne Wiederholung“

- Ziehen **ohne Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Wie in Variante 2: Für erste Ziehung n Möglichkeiten, für zweite $n-1$, ..., für r-te Ziehung $n-r+1$ Möglichkeiten, Multiplikationsprinzip anwenden; **aber:** *je $r!$ Möglichkeiten unterscheiden sich nur durch die (nicht zu berücksichtigende!) Reihenfolge.*
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$
{}_nC_r := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}
$$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$
\{(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}_n^r \mid m_1 < m_2 < \cdots < m_r\}
$$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **ohne** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- Häufig Anwendung bei *gleichzeitigem* Ziehen von r aus n Objekten bzw. simultane Auswahl von r aus n Plätzen; Anzahl der Möglichkeiten entspricht Anzahl r-elementiger Teilmengen aus n-elementiger Menge.

Variante IV

„ungeordnete Probe (Kombination) mit Wiederholung“

- Ziehen **mit Zurücklegen** und **ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge**.

  Verständnis schwieriger!
  Vorstellung: Erstelle „Strichliste“ mit r Strichen, verteilt auf n Felder (eines für jede Kugel) $\rightsquigarrow$ r Striche zwischen $n-1$ „Feldbegrenzungen“. Anzahl Möglichkeiten entspricht Anzahl der Möglichkeiten, die r Striche in der „Reihung“ der $n-1+r$ Striche&Feldbegrenzungen zu positionieren.
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$ {}_n^wC_r := \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{(n+r-1)\cdot(n+r-2)\cdot\ldots\cdot n}{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot 1} $$

- Formale Darstellung aller Möglichkeiten:

$$ \{(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{N}_n^r \mid m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_r\} $$

- gleichbedeutend: Verteilen von **nicht unterscheidbaren** Murmeln **mit** Zulassung von **Mehrfachbelegungen**
- **Achtung:** Üblicherweise **nicht** geeignet als Ω in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen, da die verschiedenen Möglichkeiten bei üblichen Ziehungsvorgängen nicht alle gleichwahrscheinlich sind!

Übersicht der Varianten I–IV

vgl. Ulrich Krengel, Einführung in die W.-Theorie und Statistik, 7. Aufl., Vieweg, Wiesbaden, 2003

r unterscheidbare Kugeln aus Urne mit n (unterscheidbaren) Kugeln	**mit** Zurücklegen	**ohne** Zurücklegen	
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante I $_n^wV_r = n^r$	Variante II $_nV_r = (n)_r$	**unterscheidbare** Murmeln
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	Variante IV $_n^wC_r = \binom{n+r-1}{r}$	Variante III $_nC_r = \binom{n}{r}$	**nicht unterscheidbare** Murmeln
	mit Mehrfachbesetzung	**ohne** Mehrfachbesetzung	r Murmeln in n unterscheidbare Schubladen

Bemerkungen

- Wird ohne Zurücklegen gezogen, muss natürlich $r \leq n$ gefordert werden!
  (Es können insgesamt nicht mehr Kugeln entnommen werden, als zu Beginn in der Urne enthalten waren.)
- Werden **alle** Kugeln ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge entnommen, wird häufig folgende Verallgemeinerung betrachtet:
  - Nicht alle n Kugeln sind unterscheidbar (durchnummeriert).
  - Es gibt $m < n$ (unterscheidbare) Gruppen von Kugeln, die jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_m$ **nicht** unterscheidbare Kugeln umfassen (mit $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$).
  - Da es jeweils $n_1!, n_2!, \ldots, n_m!$ nicht unterscheidbare Anordnungen der Kugeln innerhalb der Gruppen gibt, reduziert sich die Anzahl der insgesamt vorhandenen Möglichkeiten von ${}_nP := {}_nV_n = n!$ auf

$${}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_m} := \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!} \; .$$

  - Typische Anwendung: Buchstabenanordnungen bei „Scrabble“
  - Nenner von ${}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ liefert Anzahl der Möglichkeiten für jeweils nicht unterscheidbare Anordnungen.

- Anwendung der Kombinatorik in Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen:
  - Auswahl eines geeigneten Ergebnisraums Ω mit **gleichwahrscheinlichen** Ausgängen des Zufallsexperiments.
  - Bestimmen von $|\Omega|$ mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
  - Bestimmen von $|A|$ für interessierende Ereignisse $A \subseteq \Omega$ mit kombinatorischen Hilfsmitteln.
- Häufig gibt es nicht **die** richtige Lösung, sondern mehrere, da oft mehrere Modelle (mehr oder weniger) geeignet sind.
- Wird aber beispielsweise Ω unter Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge konstruiert, obwohl die Reihenfolge für das interessierende Ereignis A unwichtig ist, müssen unterschiedliche mögliche Anordnungen bei der Konstruktion von A ebenfalls berücksichtigt werden!
- Trotz vorhandener (und nützlicher) Modelle:

Richtiges Zählen hat häufig „Knobelcharacter“, stures Einsetzen in Formeln selten ausreichend, Mitdenken erforderlich!

Beispiele

- **Lottospiel „6 aus 49“** (ohne Berücksichtigung einer Zusatzzahl)
  - Interessierendes Ereignis A: (Genau) 3 „Richtige“
  - $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$, $|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820$

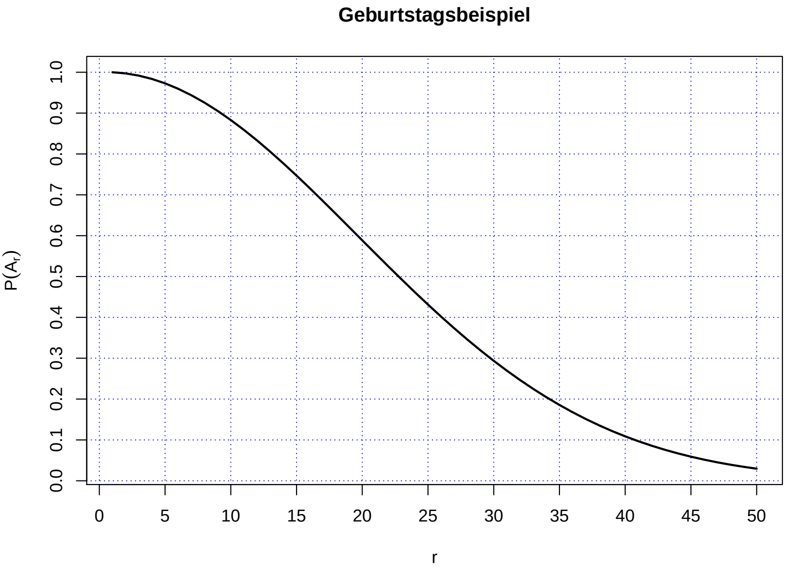
  $\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0.01765 = 1.765\%$
- Anzahl der Möglichkeiten bei **zweimaligem Würfelwurf**
  - wenn die Reihenfolge irrelevant (z.B. bei gleichzeitigem Werfen) ist:

    $|\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = 21$

    Vorsicht: nicht alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich!
  - wenn die Reihenfolge relevant ist:

    $|\Omega| = 6^2 = 36$
- **Geburtstage**
  Zusammensetzung der Geburtstage (ohne Jahreszahl; Vernachlässigung von Schaltjahren) bei r Personen (mit Reihenfolgeberücksichtigung)
  - Interessierendes Ereignis A_r: alle r Personen haben verschiedene Geburtstage
  - $|\Omega_r| = 365^r$, $|A_r| = (365)_r$ für $r \leq 365$, $|A_r| = 0$ sonst.

  $\Rightarrow$ $P(A_r) = \frac{(365)_r}{365^r}$ für $r \leq 365$, $P(A_r) = 0$ sonst.


Geburtstagsbeispiel
P(A_r)
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
r

Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume I

- Verallgemeinerung von Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsräumen: **Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume**
- Ω endlich (mit $|\Omega| = n$) oder abzählbar unendlich.
- Nach wie vor: Jeder Teilmenge von Ω soll eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden können, also $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Damit: Jedem Ergebnis kann Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.
- **Aber:**
  Ergebnisse (auch für endliches Ω) nicht mehr (zwingend) gleichwahrscheinlich.

Allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume II

Definition 6.2 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei $\Omega \neq \emptyset$ endlich oder abzählbar unendlich und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sei $p : \Omega \to [0,1]$ eine Abbildung mit $p(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Dann heißen das durch

$$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}; P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß sowie der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **diskret**, *p heißt auch* **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

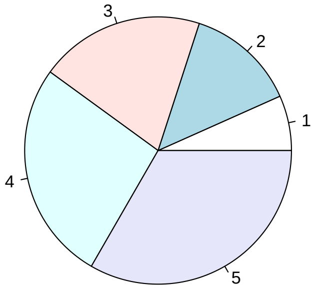
- Ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum ist also ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $p : \Omega \to [0,1]; p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.

Beispiel I

- **„Glücksrad“** mit folgendem Aufbau:
  n Segmente, nummeriert von 1 bis n, deren Größe proportional zur Nummer ist (und die das Rad vollständig ausfüllen).
  - $\Omega = \{1, \ldots, n\}$
  - Mit $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ erhält man für die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p : \Omega \to [0, 1]; p(\omega) = \frac{\omega}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2\omega}{n(n+1)}$$

- Beispiel für $n = 5$:



Beispiel II

- **Münze** (mit „Wappen“ und „Zahl“) solange werfen, bis **zum ersten Mal „Zahl“** zu sehen ist:
  Mögliche Ergebnisse: {Z,WZ,WWZ,WWWZ,...}, *im Folgenden repräsentiert durch Anzahl der Würfe (insgesamt)*.
  - $\Omega = \mathbb{N}$
  - Wahrscheinlichkeitsfunktion (bei „fairer“ Münze)

$$p : \Omega \to [0,1]; p(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega} = \frac{1}{2^{\omega}}$$

- Wahrscheinlichkeit, höchstens n Würfe zu benötigen:

$$P(\{1,\ldots,n\}) = \sum_{\omega=1}^{n} p(\omega) = \sum_{\omega=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Hier verwendet: Geometrische Summenformel $\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q\cdot(1-q^n)}{1-q}$ *(für* $q \neq 1$*)*

Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

Bedingte Wahrscheinlichkeiten I

- Oft interessant: Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses B, wenn schon bekannt ist, dass ein (anderes) Ereignis A, in diesem Zusammenhang auch **Bedingung** genannt, eingetreten ist.
- Beispiele:
  - Werfen eines Würfels:
    Wahrscheinlichkeit dafür, eine 2 gewürfelt zu haben, falls bekannt ist, dass eine ungerade Zahl gewüfelt wurde $\rightsquigarrow 0$
    Wahrscheinlichkeit dafür, eine 3 oder 4 gewürfelt zu haben, falls bekannt ist, dass eine Zahl größer als 3 gewürfelt wurde $\rightsquigarrow \frac{1}{3}$
  - Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne mit 2 schwarzen und 2 weißen Kugeln bei Ziehung ohne Zurücklegen in der zweiten Ziehung eine weiße Kugel zu ziehen, wenn bekannt ist, dass in der ersten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wurde $\rightsquigarrow \frac{2}{3}$
  - Wahrscheinlichkeit, dass man beim Poker-Spiel (Texas Hold'em) zum Ende des Spiels einen Vierling als höchstes Blatt hat, wenn man bereits ein Paar in der Starthand hält $\rightsquigarrow 0.8424\%$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten II

- Offensichtlich sind diese Wahrscheinlichkeiten nur dann interessant, wenn das Ereignis A auch mit positiver Wahrscheinlichkeit eintritt.
- *Rückblick:*
  In deskriptiver Statistik: Begriff der *bedingten relativen Häufigkeiten*
  - $r(a_i|Y = b_j) := \frac{h_{ij}}{h_{\cdot j}} = \frac{r_{ij}}{r_{\cdot j}}$
  - $r(b_j|X = a_i) := \frac{h_{ij}}{h_{i\cdot}} = \frac{r_{ij}}{r_{i\cdot}}$

  für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, \ldots, l\}$.
- Analog zur Einschränkung der statistischen Masse bei bedingten relativen Häufigkeiten: Einschränkung von Ω auf bedingendes Ereignis A.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten III

- Zur Ermittlung der bedingten Wahrscheinlichkeit, eine 3 oder 4 gewürfelt zu haben (Ereignis $B = \{3, 4\}$), falls bekannt ist, dass eine Zahl größer als 3 gewürfelt wurde (Ereignis $A = \{4, 5, 6\}$):
  - Berechnung der Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens der Bedingung A und des interessierenden Ereignisses B: $P(A \cap B) = P(\{3, 4\} \cap \{4, 5, 6\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{6}$
  - Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Bedingung A: $P(A) = P(\{4, 5, 6\}) = \frac{3}{6}$
  - Analog zum Fall relativer bedingter Häufigkeiten: Berechnung des Verhältnisses $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten IV

Definition 7.1

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $A, B \in \mathcal{F}$ *mit* $P(A) > 0$*. Dann heißt*

$$P(B|A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** *von* B *unter der Bedingung* A*.*

Satz 7.1

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $A \in \mathcal{F}$ *mit* $P(A) > 0$*. Dann ist die Abbildung*

$$P(\,\cdot\,|A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}; B \mapsto P(B|A)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$ *gemäß Definition 5.4, also auch* $(\Omega, \mathcal{F}, P(\,\cdot\,|A))$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

Bedingte Wahrscheinlichkeiten V

- **Wichtig:** Satz 7.1 gilt nur dann, wenn das bedingende Ereignis A festgehalten wird. Bei der Abbildung $P(A|\cdot) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ handelt es sich im Allgemeinen **nicht** (und bei strenger Auslegung von Definition 7.1 sogar **nie**) um ein Wahrscheinlichkeitsmaß.
- Aus Definition 7.1 folgt unmittelbar

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \tag{1}$$

  für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$.
- Obwohl $P(B|A)$ nur für $P(A) > 0$ definiert ist, bietet es sich aus technischen Gründen an, Schreibweisen wie in Gleichung (1) auch für $P(A) = 0$ zuzulassen. In diesem Fall sollen Produkte, in denen neben (eigentlich) nicht definierten bedingten Wahrscheinlichkeiten mindestens ein Faktor 0 auftritt, definitionsgemäß ebenfalls den Wert 0 annehmen.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten VI

- Mit dieser Konvention für Bedingungen mit Eintrittswahrscheinlichkeit 0 lässt sich durch wiederholtes Einsetzen von Gleichung (1) leicht der **Multiplikationssatz**

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

  für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ herleiten.
- Mit dem Multiplikationssatz können insbesondere Wahrscheinlichkeiten in sogenannten Baumdiagrammen (für „mehrstufige“ Zufallsexperimente) ausgewertet werden.
- In vielen Anwendungen sind häufig vor allem bedingte Wahrscheinlichkeiten bekannt (bzw. werden als bekannt angenommen).
- Es ist nicht immer einfach, die Angabe bedingter Wahrscheinlichkeiten auch als solche zu erkennen!

Bedingte Wahrscheinlichkeiten VII

- Beispiel:
  In einer kleinen Druckerei stehen 3 Druckmaschinen unterschiedlicher Kapazität zur Verfügung:
  - Maschine 1, mit der 50% aller Druckjobs gedruckt werden, produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1% ein fehlerhaftes Ergebnis,
  - Maschine 2, mit der 30% aller Druckjobs gedruckt werden, produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.25% ein fehlerhaftes Ergebnis,
  - Maschine 3, mit der 20% aller Druckjobs gedruckt werden, produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5% ein fehlerhaftes Ergebnis.

  Sind die interessierenden Ereignisse gegeben durch
  - M_i: Maschine i wird zur Produktion des Druckjobs eingesetzt ($i \in \{1, 2, 3\}$),
  - F: Die Produktion des Druckjobs ist fehlerbehaftet,

  so sind insgesamt bekannt:

$$
\begin{array}{ccc}
P(M_1) = 0.5 & P(M_2) = 0.3 & P(M_3) = 0.2 \\
P(F|M_1) = 0.001 & P(F|M_2) = 0.0025 & P(F|M_3) = 0.005
\end{array}
$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten VIII

- In der Situation des Druckmaschinen-Beispiels interessiert man sich häufig für die *unbedingte* Wahrscheinlichkeit, einen fehlerhaften Druckjob zu erhalten, also für $P(F)$.
- Diese Wahrscheinlichkeit kann mit einer Kombination von Gleichung (1) auf Folie 174 und der letzten Rechenregel von Folie 148 berechnet werden:

Satz 7.2 (Satz der totalen Wahrscheinlichkeit)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ (für $n \in \mathbb{N}$) eine Zerlegung von Ω, es gelte also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$. Für beliebige Ereignisse $B \in \mathcal{F}$ gilt dann

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j) \,.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten IX

- Im Druckmaschinen-Beispiel erhält man so:

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P(F|M_1) \cdot P(M_1) + P(F|M_2) \cdot P(M_2) + P(F|M_3) \cdot P(M_3) \\
&= 0.001 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.2 \\
&= 0.00225 = 0.225\%
\end{aligned}
$$

- Die Wahrscheinlichkeit von $A \cap B$ kann mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten in zwei Varianten berechnet werden:

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

- Dies kann (bei Kenntnis der restlichen beteiligten Wahrscheinlichkeiten!) dazu benutzt werden, Bedingung und interessierendes Ereignis umzudrehen. Ist z.B. $P(B|A)$ (sowie $P(A)$ und $P(B)$) gegeben, so erhält man $P(A|B)$ durch

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \ .$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten X

- Wird dabei die unbedingte Wahrscheinlichkeit $P(B)$ mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit (Satz 7.2) berechnet, so erhält man:

Satz 7.3 (Formel von Bayes)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ (für $n \in \mathbb{N}$) eine Zerlegung von Ω, es gelte also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$. Sei $B \in \mathcal{F}$ ein weiteres Ereignis mit $P(B) > 0$. Dann gilt:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}, \qquad k \in \{1, \ldots, n\}$$

- Anwendung der Formel von Bayes im Druckmaschinen-Beispiel:
  Frage: Wenn eine Fehlproduktion aufgetreten ist, mit welchen Wahrscheinlichkeiten sind dann die verschiedenen Druckmaschinen für den Fehldruck „verantwortlich"?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten XI

- Es interessiert nun also $P(M_i|F)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Mit Formel von Bayes (ohne Verwendung des Zwischenergebnisses $P(F)$):

$$
\begin{aligned}
P(M_1|F) &= \frac{P(F|M_1) \cdot P(M_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(F|M_j) \cdot P(M_j)} \\
&= \frac{0.001 \cdot 0.5}{0.001 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.2} = \frac{2}{9} \\
P(M_2|F) &= \frac{P(F|M_2) \cdot P(M_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(F|M_j) \cdot P(M_j)} \\
&= \frac{0.0025 \cdot 0.3}{0.001 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.2} = \frac{3}{9} \\
P(M_3|F) &= \frac{P(F|M_3) \cdot P(M_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(F|M_j) \cdot P(M_j)} \\
&= \frac{0.005 \cdot 0.2}{0.001 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.2} = \frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Fehler bei bedingten Wahrscheinlichkeiten I

(aus Walter Krämer: Denkste!, Piper, München, 2000)

- Häufig (auch in den Medien!) ist der Fehler zu beobachten, dass das bedingende und das eigentlich interessierende Ereignis vertauscht werden.
- Beispiel (Schlagzeile in einer Ausgabe der ADAC-Motorwelt):

  Der Tod fährt mit!
  Vier von zehn tödlich verunglückten Autofahrern trugen keinen Sicherheitsgurt!

- Bezeichnet S das Ereignis „Sicherheitsgurt angelegt“ und T das Ereignis „Tödlicher Unfall“, so ist hier die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{S}|T) = 0.4$, also die Wahrscheinlichkeit, keinen Sicherheitsgurt angelegt zu haben, falls man bei einen Unfall tödlich verunglückt ist, mit 40% angegeben.
- Was soll die Schlagzeile vermitteln?
  - Unwahrscheinlich: Anschnallen ist gefährlich, da 6 von 10 verunglückten Autofahren einen Sicherheitsgurt trugen.
  - Wohl eher: Anschnallen ist nützlich!
- **Aber:** Zitierte Wahrscheinlichkeit ist absolut ungeeignet, um Nutzen des Anschnallens zu untermauern!

Beispiel: Fehler bei bedingten Wahrscheinlichkeiten II

(aus Walter Krämer: Denkste!, Piper, München, 2000)

- Stattdessen interessant: $P(T|\overline{S})$ vs. $P(T|S)$
  (*Wie stehen Wahrscheinlichkeiten, bei nicht angelegtem bzw. angelegtem Sicherheitsgurt tödlich zu verunglücken, zueinander?*)
- Aus $P(\overline{S}|T)$ kann Verhältnis $\frac{P(T|\overline{S})}{P(T|S)}$ nur berechnet werden, falls die Wahrscheinlichkeit bekannt ist, mit der ein Autofahrer angeschnallt ist:

$$\begin{aligned} P(T|S) &= \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|T) \cdot P(T)}{P(S)} \\ P(T|\overline{S}) &= \frac{P(T \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(\overline{S}|T) \cdot P(T)}{P(\overline{S})} \\ \Rightarrow \frac{P(T|\overline{S})}{P(T|S)} &= \frac{P(\overline{S}|T) \cdot P(S)}{P(\overline{S}) \cdot P(S|T)} \end{aligned}$$

- Für $P(S) = 0.9$: $\frac{P(T|\overline{S})}{P(T|S)} = 6$, also Risiko ohne Gurt 6 mal höher als mit Gurt.
- Für $P(S) = 0.2$: $\frac{P(T|\overline{S})}{P(T|S)} = \frac{1}{6}$, also Risiko ohne Gurt 6 mal niedriger als mit Gurt.