

## Teil II

# Wahrscheinlichkeitsrechnung

# Inhaltsverzeichnis

(Ausschnitt)

## 5 Zufallsexperimente

- Ergebnisse
- Ereignisse
- Wahrscheinlichkeiten

# Zufallsexperimente (Zufallsvorgänge)

- Unter Zufallsexperimenten versteht man Geschehnisse,
  - ▶ deren *mögliche* (sich gegenseitig ausschließende!) Ausgänge bekannt sind,
  - ▶ deren (konkreter) Ausgang aber ungewiss ist (oder zumindest ungewiss zu sein scheint bzw. in der Anwendungssituation a priori nicht bestimmt werden kann!).
- Beispiele für Zufallsexperimente: Würfelwurf, Münzwurf, Lottoziehung, gefallene Zahl beim Roulette, ausgeteiltes Blatt bei Kartenspielen
- Entscheidend ist weniger, ob der Ausgang eines Vorgangs tatsächlich „zufällig“ ist, sondern vielmehr, ob der Ausgang als zufällig angesehen werden soll!
- Zur Modellierung von Zufallsexperimenten mehrere Komponenten erforderlich.

# Ergebnisse

## Definition 5.1

Zu einem Zufallsexperiment nennt man die nichtleere Menge

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \text{ ist ein möglicher Ausgang des Zufallsexperiments}\}$$

der möglichen (sich gegenseitig ausschließenden) Ausgänge **Ergebnisraum**, ihre Elemente  $\omega$  auch **Ergebnisse**.

- Nach Definition 5.1 kann also **nach** Durchführung des Zufallsexperiments **genau ein** Ergebnis  $\omega \in \Omega$  angegeben werden, das den Ausgang des Zufallsexperiments beschreibt.

# Ereignisse I

- Interesse gilt nicht nur einzelnen Ausgängen des Zufallsexperiments, sondern oft auch Zusammenschlüssen von Ausgängen, sog. **Ereignissen**.

Beispiele

- ▶ beim Roulette: Es ist Rot gefallen
- ▶ beim Würfeln: Es ist eine gerade Zahl gefallen
- ▶ beim Skatenspiel: Das eigene Blatt enthält mindestens 2 Buben.
- ▶ beim Lottospiel: Eine vorgegebene Tippreihe enthält (genau) 3 „Richtige“
- Ereignisse sind also Teilmengen des Ergebnisraums; ist  $\Omega$  der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, gilt für jedes Ereignis  $A$  die Beziehung  $A \subseteq \Omega$ .
- Ereignisse, die nur aus einem Element des Ergebnisraums (also einem einzigen Ergebnis) bestehen, heißen auch **Elementarereignisse**.

# Ereignisse II

- Ob ein Ereignis  $A$  eingetreten ist oder nicht, hängt vom tatsächlichen Ausgang des Zufallsexperiments ab:
  - ▶ Ein Ereignis  $A \subseteq \Omega$  ist eingetreten, falls für den Ausgang  $\omega$  gilt:  $\omega \in A$
  - ▶ Ein Ereignis  $A \subseteq \Omega$  ist nicht eingetreten, falls für den Ausgang  $\omega$  gilt:  $\omega \notin A$
- ↪ Es gilt insbesondere **nicht** (wie bei Ergebnissen), dass jeweils (nur) genau ein Ereignis eintritt!
- Das Ereignis  $\Omega$  wird als **sicheres Ereignis** bezeichnet, da es offensichtlich immer eintritt.
- Das Ereignis  $\emptyset = \{\}$  (die leere Menge) wird als **unmögliches Ereignis** bezeichnet, da es offensichtlich nie eintritt.  
(Für kein Element  $\omega \in \Omega$  kann  $\omega \in \emptyset$  gelten.)

# Ereignisse III

- Ereignisse können verknüpft werden. Dabei lassen sich aussagenlogische Verknüpfungen in mengentheoretische übersetzen, z.B.:
  - ▶ Wenn Ereignis  $A$  eintritt, dann auch Ereignis  $B \Leftrightarrow$  Es gilt  $A \subseteq B$ .
  - ▶ Die Ereignisse  $A$  und  $B$  treten nie gleichzeitig ein  $\Leftrightarrow$  Es gilt  $A \cap B = \emptyset$ .
  - ▶ Ereignis  $A$  und Ereignis  $B$  treten ein  $\Leftrightarrow$  Ereignis  $A \cap B$  tritt ein.
  - ▶ Ereignis  $A$  oder Ereignis  $B$  treten ein  $\Leftrightarrow$  Ereignis  $A \cup B$  tritt ein.

## Vorsicht!

„Oder“ (für sich betrachtet) wird stets nicht-exklusiv verwendet, also **nicht** im Sinne von „entweder–oder“. „ $A$  oder  $B$  tritt ein“ bedeutet also, dass  $A$  eintritt oder  $B$  eintritt oder beide Ereignisse eintreten.

# Ereignisse IV

## Definition 5.2

Sei  $\Omega$  eine Menge, seien  $A$  und  $B$  Teilmengen von  $\Omega$ , es gelte also  $A \subseteq \Omega$  und  $B \subseteq \Omega$ . Dann heißen

- $A \cup B := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$  die **Vereinigung** von  $A$  und  $B$ ,
- $A \cap B := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$  der **Durchschnitt** von  $A$  und  $B$ ,
- $A \setminus B := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$  die **Differenz** von  $A$  und  $B$ ,
- $\bar{A} := \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$  das **Komplement** von  $A$ ,
- $A$  und  $B$  **disjunkt**, falls  $A \cap B = \emptyset$ ,
- $A$  und  $B$  **komplementär**, falls  $B = \bar{A}$ .



# Ereignisse $V$

- Das Komplement  $\bar{A}$  eines Ereignisses  $A$  heißt auch **Gegenereignis** von  $A$ . Es tritt offensichtlich genau dann ein, wenn  $A$  nicht eintritt.
- Vereinigungen und Durchschnitte werden auch für mehr als 2 (Teil-)Mengen bzw. Ereignisse betrachtet, zum Beispiel
  - ▶ die Vereinigung  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  bzw. der Durchschnitt  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  der  $n$  Mengen bzw. Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$ ,
  - ▶ die Vereinigung  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  bzw. der Durchschnitt  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  der (abzählbar) unendlichen vielen Mengen bzw. Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$

# Rechenregeln für Mengenoperationen I

Für Teilmengen bzw. Ereignisse  $A, B, C$  von  $\Omega$  gelten die „Rechenregeln“:

- Idempotenzgesetze, neutrale und absorbierende Elemente

$$\begin{array}{llll} A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup \Omega = \Omega & A \cap B \subseteq A \\ A \cup A = A & A \cap A = A & A \cap \Omega = A & A \cap B \subseteq B \end{array}$$

- Kommutativgesetze

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

- Assoziativgesetze

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

# Rechenregeln für Mengenoperationen II

- Distributivgesetze

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- De Morgansche Gesetze

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- Disjunkte Zerlegung von  $A$  durch  $B$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \quad \text{mit} \quad (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$$

# Wahrscheinlichkeiten I

- Zur Modellierung von Zufallsexperimenten: „Quantifizierung“ des Zufalls durch *Angabe von **Wahrscheinlichkeiten** für Ereignisse*.
- Spezieller:  
Gesucht ist eine Abbildung, die *einer bestimmten Menge von Ereignissen* (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten zuordnet.
- Aber:
  - ▶ Was sind Wahrscheinlichkeiten?
  - ▶ Woher kommen diese Wahrscheinlichkeiten?
  - ▶ Was sagen diese Wahrscheinlichkeiten aus?

# Wahrscheinlichkeiten II

- Es gibt verschiedene geläufige Wahrscheinlichkeitsbegriffe, insbesondere:
  - ▶ Klassischer oder Laplacescher Wahrscheinlichkeitsbegriff:  
 $\Omega$  ist so konstruiert, dass alle Elementarereignisse die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit haben.
  - ▶ Häufigkeitsbasierter Wahrscheinlichkeitsbegriff:  
Zufallsexperiment wird als unendlich oft wiederholbar vorausgesetzt, Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse als „Grenzwert“ der relativen Eintrittshäufigkeiten in (unendlicher) Folge von Durchführungen.
  - ▶ Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff:  
Persönliche Einschätzungen geben Eintrittswahrscheinlichkeiten an. Festlegung zum Beispiel durch *subjektive* Angabe von „Grenz“-Wettquoten auf das Eintreten von Ereignissen.
- Unabhängig vom konkreten Wahrscheinlichkeitsbegriff:  
Bestimmte „Konsistenzbedingungen“ für
  - ▶ Wahrscheinlichkeiten und
  - ▶ Menge der Ereignisse, denen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können sinnvoll.

# Wahrscheinlichkeiten III

- Folgender „Minimalsatz“ von Bedingungen geläufig:
  - ▶  $\Omega$  muss eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden können; genauer muss diese Wahrscheinlichkeit 1 betragen.
  - ▶ Wenn einem Ereignis  $A$  eine (Eintritts-)Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann, dann muss auch dem Gegenereignis  $\bar{A}$  (also dem Nichteintreten des Ereignisses  $A$ ) eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden können; genauer muss die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten 1 betragen.
  - ▶ Wenn einer Menge von Ereignissen  $A_1, A_2, \dots$  Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können, dann muss auch eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines dieser Ereignisse eintritt, angegeben werden können; sind die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  (paarweise) disjunkt, dann muss diese Wahrscheinlichkeit mit der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten übereinstimmen.
  - ▶ Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen dürfen nicht negativ sein.
- Mengensysteme, die diesen Bedingungen genügen, heißen  $\sigma$ -Algebren.

# $\sigma$ -Algebra I

## Definition 5.3 ( $\sigma$ -Algebra)

Sei  $\Omega \neq \emptyset$  eine Menge. Eine Menge  $\mathcal{F}$  von Teilmengen von  $\Omega$  heißt  **$\sigma$ -Algebra** über  $\Omega$ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
- 2  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ ,
- 3  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ .

- Ist  $\Omega$  endlich (oder abzählbar unendlich), wird für  $\mathcal{F}$  häufig die Menge *aller* Teilmengen von  $\Omega$ , die sog. **Potenzmenge**  $\mathcal{P}(\Omega)$ , gewählt.
- Gilt  $\#\Omega = n$ , so ist  $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^n$ .

# $\sigma$ -Algebra II

- Aus Definition 5.3 folgen zahlreiche weitere Eigenschaften, z.B.:
  - ▶  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ,
  - ▶  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ ,
  - ▶  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$  und  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ ,
  - ▶  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$ .
- Das Paar  $(\Omega, \mathcal{F})$  wird auch „Messraum“ genannt.



# Wahrscheinlichkeitsmaß

- Abbildungen, die den Elementen von  $\mathcal{F}$  (!) Wahrscheinlichkeiten zuordnen, heißen Wahrscheinlichkeitsmaße.

## Definition 5.4 (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Es seien  $\Omega \neq \emptyset$  eine Menge,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  und  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung.  $P$  heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf  $\mathcal{F}$ , falls gilt:

- 1  $P(A) \geq 0$  für alle  $A \in \mathcal{F}$ ,
  - 2  $P(\Omega) = 1$ ,
  - 3  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  für alle  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  mit  $A_j \cap A_k = \emptyset$  für  $j \neq k$ .
- Die Eigenschaften 1–3 in Definition 5.4 heißen auch *Axiome von Kolmogorov*.

# Wahrscheinlichkeitsraum

- Insgesamt wird ein Zufallsexperiment vollständig durch einen Wahrscheinlichkeitsraum beschrieben (und mit ihm identifiziert):

## Definition 5.5 (Wahrscheinlichkeitsraum)

Seien  $\Omega \neq \emptyset$  ein Ergebnisraum,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  und  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{F}$ . Dann heißt das Tripel  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

**Wahrscheinlichkeitsraum**.  $\mathcal{F}$  wird auch **Ereignisraum** genannt.

# Beispiel (Zufallsexperiment)

- (Einmaliges) Werfen eines (fairen!) Würfels als Zufallsexperiment.
  - ▶ Geeigneter Ergebnisraum:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - ▶ Geeigneter Ereignisraum:  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  mit  $\#\mathcal{F} = 2^{\#\Omega} = 2^6 = 64$
  - ▶ Geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß:  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; P(A) = \frac{\#A}{6}$
- Beispiele für Ereignisse:
  - ▶  $A$ : Eine vier ist gefallen;  $A = \{4\}$
  - ▶  $B$ : Eine gerade Zahl wurde gewürfelt;  $B = \{2, 4, 6\}$
  - ▶  $C$ : Eine Zahl  $\leq 3$  wurde gewürfelt;  $C = \{1, 2, 3\}$
  - ▶  $D$ : Eine Zahl  $> 2$  wurde gewürfelt;  $D = \{3, 4, 5, 6\}$
- Es gilt:  $P(A) = \frac{1}{6}$ ,  $P(B) = P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .
- Es gilt zum Beispiel, dass  $A$  und  $C$  disjunkt sind, oder dass  $\bar{B}$  das Ereignis „ungerade Zahl gewürfelt“ beschreibt.

# Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Es lassen sich die folgenden Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsräume  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und beliebige Ereignisse  $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  herleiten:

- ①  $P(A) \leq 1$ ,
- ②  $P(\emptyset) = 0$ ,
- ③  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ ,
- ④  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ,
- ⑤  $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \dots + P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n)$

und für  $n = 2$  und  $n = 3$  weiter aufgeschlüsselt:

- ①  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
- ②  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
- ⑥ Bilden die  $A_i$  eine **Zerlegung** von  $\Omega$ , d.h. gilt  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  und  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$ , so gilt

$$P(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B \cap A_i) .$$

Insbesondere gilt stets  $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$ .