Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
PD Dr. Martin Becker

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung SS 2020

Aufgabe 32

In einer Abteilung einer Finanzbehörde werden eingehende Einkommenssteuererklärungen zufällig auf die Mitarbeiter A, B, C und D aufgeteilt. Aufgrund unterschiedlicher Ausführungsgeschwindigkeiten werden 30% der Erklärungen von Mitarbeiter A, 30% der Erklärungen von Mitarbeiter B, 15% der Erklärungen von Mitarbeiter C und 25% der Erklärungen von Mitarbeiter D bearbeitet. Gegen die ausgestellten Steuerbescheide werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% bei Mitarbeiter A, 4% bei Mitarbeiter B, 6% bei Mitarbeiter C und 5% bei Mitarbeiter D (erfolgreich) Einsprüche eingelegt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass gegen einen zufällig ausgewählten Einkommenssteuerbescheid ein (erfolgreicher) Einspruch eingelegt wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht (erfolgreich) per Einspruch beanstandeter Einkommenssteuerbescheid von Mitarbeiter B ausgestellt wurde?

(c) Sind die Ereignisse „Bescheid wird (erfolgreich) beanstandet“ und „Mitarbeiter B hat den Bescheid erstellt“ stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 33

In einer Urne liegen je eine rote, grüne, blaue und schwarze Kugel. Man zieht eine Kugel und betrachtet die Ereignisse:
A := „die gezogene Kugel ist rot oder grün“,
B := „die gezogene Kugel ist rot oder blau“,
C := „die gezogene Kugel ist rot oder schwarz“.
Zeigen Sie, dass die drei Ereignisse paarweise unabhängig sind, insgesamt aber abhängig sind.

Aufgabe 34

Ein (fairer) Würfel wird zweimal hintereinander geworfen, die möglichen Ausgänge des Experiments seien in der Ergebnismenge

$$\Omega = \{(m_1, m_2) \,|\, m_1, m_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$$

zusammengefasst.
Betrachten Sie im Folgenden die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis des zweifachen Würfelswurfs den Betrag der Differenz der beiden gewürfelten Zahlen zuordnet, also die Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}; X((m_1, m_2)) := |m_1 - m_2| \, .$$

(a) Stellen Sie die Abbildung X in Tabellenform (in Abhängigkeit von m_1 und m_2) dar.

(b) Geben Sie den Träger $T(X)$ von X sowie die zugehörigen Punktwahrscheinlichkeiten an.

(c) Stellen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X auf.

(d) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X und die Verteilungsfunktion F_X grafisch dar.

(e) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\{X \leq 4\} \qquad P\{X > 2\} \qquad P\{1 \leq X \leq 4\} \qquad P\{1 < X < 5\}$$

(f) Nach einem Kochabend zu dritt einigen sich Annabel, Beatrice und Christoph darauf, den Zufall bestimmen zu lassen, wer sich um das Einräumen der Spülmaschine kümmern muss. Christoph schlägt vor, zweimal zu Würfeln und den Betrag der Differenz der beiden gewürfelten Zahlen zu bestimmen. Ist das Ergebnis 0 oder 1, so soll Annabel sich um das Geschirr kümmern, bei 2 oder 3 Beatrice, schließlich bei 4 oder 5 er selbst.
Ist Christophs Vorschlag fair (in dem Sinn, dass sich jeder mit gleicher Wahrscheinlichkeit um das Geschirr kümmern muss)? Falls nicht, können Sie einen ähnlichen Vorschlag zur Auslosung machen, der jedoch fair im obigen Sinn ist?

Aufgabe 35

Die diskrete Zufallsvariable X besitze die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1/8 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 3/4 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Geben Sie die Sprungstellen mit den entsprechenden Punktwahrscheinlichkeiten an.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\{0 < X \leq 2\} \qquad P\{0 \leq X < 2\} \qquad P\{X \geq 1\}$$

Aufgabe 36

Gegeben sei die Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

einer eindimensionalen stetigen Zufallsvariablen X.

(a) Bestimmen und zeichnen Sie eine Dichtefunktion f_X von X.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\{X \leq 2\} \qquad P\{X \in [\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}]\} \qquad P\{X \geq 4\} \qquad P\{X = 2\}$$