

11. Übungsblatt zur Vorlesung  
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung SS 2019

Aufgabe 51

Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Es seien  $X$  die Anzahl, mit der die Augenzahl „6“ und  $Y$  die Anzahl, mit der die Augenzahl „1“ erzielt wird.

- Geben Sie die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors  $(X, Y)$  an.
- Geben Sie die Randverteilungen von  $X$  und  $Y$  an.
- Bestimmen Sie  $P(\{X \leq 1, Y \leq 1\})$ .
- Prüfen Sie nach, ob  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 52

In der folgenden Tabelle ist die (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung des zweidimensionalen diskreten Zufallsvektors  $(X, Y)$  gegeben:

$Y$ $X$	1	2	3
1	0.02	0.13	0.15
2	0.16	0.20	0.14
3	0.12	0.04	0.04

- Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung um die beiden Randverteilungen.
- Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
  - $P\{1 \leq X \leq 2, 2 \leq Y \leq 3\}$ ,
  - $P\{X \leq 2\}$ ,
  - $P\{X > 2, Y < 3\}$ .
- Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X$  unter der Bedingung  $Y = y_j$  für alle  $y_j \in T(Y)$  über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.
- Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit den Resultaten aus Teil (c)!

### Aufgabe 53

Für die **unabhängigen** Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle unvollständig wie folgt gegeben:

$Y$	1	2	$p_{i\cdot}$
$X$			
-1	1/8	·	·
0	·	·	3/8
1	·	·	·
$p_{\cdot j}$	1/3	·	1

Vervollständigen Sie die Tabelle.

### Aufgabe 54

Der zweidimensionale Zufallsvektor  $(X, Y)$  besitze die folgende gemeinsame Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} y - x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $(X, Y)$  einen Wert in  $(0, 0.5] \times (0.5, 1]$  annimmt.
- Bestimmen Sie eine Randdichte  $f_X$  von  $X$  sowie eine Randdichte  $f_Y$  von  $Y$ .
- Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von  $X$  und  $Y$ .
- Vergleichen Sie das Produkt der beiden Randdichten mit der angegebenen gemeinsamen Dichtefunktion. Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?
- Geben Sie für  $0 \leq y \leq 1$  bedingte Dichtefunktionen  $f_{X|Y=y}$  von  $X$  gegeben  $Y = y$  an.